Тема 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Лекция 1.1. Математика, ее основные элементы и методы

План

1. Развитие понятия числа. Комплексные числа.

1. Развитие понятия числа. Комплексные числа

Число – абстракция, используемая для количественной характеристики объектов. Письменными знаками – символами для записи чисел служат цифры.

В математике выделяют:

натуральные числа $N = \{1;\ 2;\ 3;\ldots\}$;

целые числа $Z = \{0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3\ldots\}$;[1]

рациональные числа $Q = \left\{\frac{m}{n},\ m \in Z,\ n \in N\right\}$;

иррациональные числа $I = \{$бесконечная непериодическая десятичная дробь$\}$;

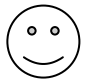
действительные числа $R = Q \cup I$. Очевидно, что $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Множество действительных чисел ***R*** дополняют символом бесконечности ∞, который не является числом. Он представляет собой символическое обозначение безграничного удаления числа от начала координат. При этом:

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty; \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty;$$
$$(-\infty)\cdot(-\infty) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty; \quad (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty.$$

Но операции $(+\infty) + (-\infty)$; $\frac{+\infty}{-\infty}$; $\frac{-\infty}{-\infty}$; $\frac{+\infty}{+\infty}$ не определены.

[1] Слово «нуль» означало отсутствие числа и буквальный смысл латинского слова *nullum* – «ничто».



> *Первоклассник обращается к отцу-математику: «Пап, я забыл, как пишется восьмерка». «Это проще простого, сынок, – отвечает тот. – Берешь знак бесконечности и поворачиваешь на пи пополам».*

В современной математике, помимо действительных чисел, используются комплексные числа. Они возникли в связи с решением алгебраических уравнений третьей степени вида $x^3 + px + q = 0$.

Формула Кардано[2] для нахождения корней этого уравнения имела вид:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

<u>*Пример 1.1*</u>. Найти размер куба, объем которого на шесть единиц меньше суммы семи его ребер.

<u>*Решение*</u>. Пусть x – сторона куба; x^3 – объем куба; $7x$ – сумма семи его ребер. Из условия задачи имеем: $x^3 + 6 = 7x$ или $x^3 - 7x + 6 = 0$.

$x^3 - 7x + 6 = 0$	
1-й способ	*2-й способ (формула Кардано)*
$x = 1$ – корень уравнения (подбор); Уравнение может быть представлено $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6 = 0)$. Решением данного уравнения являются числа: $x_1 = 1$; $x_2 = -3$; $x_3 = 2$ Таким образом, куб с описанным свойством существует	Используем формулу при $p = -7$; $q = 6$ $x = \sqrt[3]{-\frac{6}{2} + \sqrt{\frac{6^2}{4} + \frac{(-7)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{6}{2} - \sqrt{\frac{6^2}{4} + \frac{(-7)^3}{27}}} =$ $= \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 - \frac{343}{27}}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{9 - \frac{343}{27}}} =$ $= \sqrt[3]{-3 + \sqrt{-3\frac{19}{27}}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{-3\frac{19}{27}}}.$ Под знаком квадратного корня оказалось отрицательное число. Получается, что путь к корням идет через невозможную *операцию извлечения квадратного корня из отрицательного числа*

Так как задача имеет реальное решение (1-й способ), но не может быть решена действиями над действительными числами (2-й способ), то в XVI веке появилась необходимость определить корень из отрицательного числа, а именно $\sqrt{-1}$. Новые числа, для которых определена величина $\sqrt{-1}$, назвали комплексными и ввел их Р. Бомбелли[3].

---

[2] Джероламо Кардано (1501–1576) – итальянский математик, инженер, философ, медик и астролог. В его честь назван карданный вал.

[3] Рафаэль Бомбелли **(**1526–1572) – итальянский математик, инженер-гидравлик. Ввел в математику комплексные числа и разработал базовые правила действий с ними.

Понятие комплексного числа, его алгебраическая форма

Комплексным числом z называется выражение вида

$$\boxed{z = x + iy,} \tag{1.1}$$

где x и y – действительные числа, i – мнимая единица, $i^2 = -1$.

Число x называется **действительной частью** z и обозначается $\operatorname{Re} z$ (от франц. *reele* – действительный), а число y – **мнимой частью** z и обозначается $\operatorname{Im} z$ (от франц. *imaginaire* – мнимый).

Если $x = 0$, то число $z = 0 + iy = iy$ называется **чисто мнимым**; если $y = 0$, то число $z = x + i0 = x$ превращается в действительное число. Множество всех комплексных чисел обозначается ***C***. Из вышесказанного ясно, что множество всех действительных чисел является подмножеством комплексных чисел, то есть $R \subset C$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются **равными**, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Понятие «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводят.

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются **сопряженными**.

Выражение $z = x + iy$ называют **алгебраической формой** комплексного числа.

Арифметические действия над комплексными числами
в алгебраической форме

1. *Сложение комплексных чисел*

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$\boxed{z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).}$$

(1.2)

2. *Вычитание комплексных чисел*

Разностью двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$\boxed{z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).}$$

(1.3)

Теорема 1. Сумма двух сопряженных комплексных чисел является действительным числом, а разность – чисто мнимым.

□ $z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = (x + x) + i(y - y) = 2x + 0i = 2x;$

$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = (x - x) + i(y + y) = 0 + 2yi = 2yi.$ ■

3. Умножение комплексных чисел

Произведением двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$\boxed{z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).} \tag{1.4}$$

Эту формулу можно получить, перемножая комплексные числа, как многочлены с учетом $i^2 = -1$:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + x_1 iy_2 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 =$$
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Теорема 2. Произведение двух сопряженных комплексных чисел является действительным числом, равным сумме квадратов действительной и мнимой частей.

$$\square\; z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - xiy + iyx - i^2 y^2 = x^2 + y^2. \blacksquare$$

4. Деление комплексных чисел

Частным двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, $(z_2 \neq 0 + 0i)$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$\boxed{z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.} \tag{1.5}$$

Данная формула может быть получена домножением числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю («избавляются от мнимости в знаменателе»):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_{21}^2 + y_2^2} + +i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

<u>*Пример 1.2.*</u> Дано $z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 2 - 3i.$

Найти: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$.

<u>*Решение:*</u> $z_1 + z_2 = (1 + i) + (2 - 3i) = (1 + 2) + i(1 - 3) = 3 - 2i;.$

$z_1 - z_2 = (1 + i) - (2 - 3i) = (1 - 2) + i(1 + 3) = -1 + 4i;$

$z_1 \cdot z_2 = (1 + i)\cdot(2 - 3i) = 5 - i;$

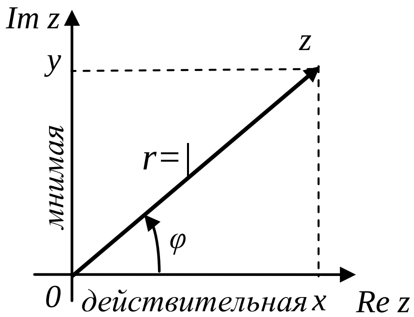
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i}{2 - 3i} = \frac{(1 + i)\cdot(2 + 3i)}{(2 - 3i)\cdot(2 + 3i)} = \frac{-1 + 5i}{13} = -\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i.$$

Тригонометрическая форма комплексного числа

Всякое комплексное число можно изобразить на плоскости. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется **комплексной**. Ось абсцисс называется **действительной осью**, а ось ординат – **мнимой осью**.

Комплексное число $z = x + iy$ можно задать с помощью радиус-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, начало которого в точке $O\,(0;\,0)$, а конец в точке $M\,(x;\,y)$.

Длина вектора $\vec{r}$ называется **модулем** комплексного числа и обозначается $|z|$ или r. Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\vec{r}$ называется **аргументом** этого комплексного числа и обозначается $Arg\ z$ или φ. Аргумент комплексного числа величина многозначная и определяется с точностью до $2\pi k,\quad k \in Z$. Значение аргумента, заключенное в промежутке $(-\pi;\pi]$, обозначается $\arg z$ и называется **главным значением аргумента**. Очевидно, что $Arg\ z = \arg z + 2\pi k,\quad k \in Z$.



Определим еще одну форму записи комплексного числа – тригонометрическую. Ее легко получить из геометрической интерпретации комплексного числа. Из прямоугольного треугольника (рис. 1.1) получаем $x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi$. Подставляя найденные выражения x и y в алгебраическую форму комплексного числа $z = x + iy$, получим $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$.

Рис. 1.1

Тригонометрической формой комплексного числа называется запись

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),} \qquad (1.6)$$

где r – модуль комплексного числа, определяемый по формуле $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

φ – его аргумент, определяемый из формул $\cos\varphi = \dfrac{x}{r},\quad \sin\varphi = \dfrac{y}{r},\quad tg\varphi = \dfrac{y}{x}$.

При переводе комплексного числа из алгебраической формы в тригонометрическую, в качестве аргумента берут только главное значение, то есть считают $\varphi = \arg z$. Такое допущение следует из того, что функция синуса и косинуса имеют период $2\pi k\quad (k \in Z)$ и поэтому:

$$\sin\varphi = \sin(\arg z + 2\pi k) = \sin(\arg z);\ \cos\varphi = \cos(\arg z + 2\pi k) = \cos(\arg z).$$

<u>Пример 1.3</u>. Записать комплексные числа $z_1 = 1 + i$; $z_2 = -1$ и $z_3 = i$ в тригонометрической форме.

<u>Решение</u>. Для z_1 имеем $x = 1, \quad y = 1,$

$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2};$

$tg\varphi = \frac{1}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$. Отсюда $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$

Для z_2 имеем $x = -1, \quad y = 0,$

$r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1;$

$tg\varphi = \frac{0}{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pi$. Отсюда $z_2 = \cos\pi + i\sin\pi.$

Для z_3 имеем $x = 0, \quad y = 1,$

$r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1;$

$tg\varphi = \frac{1}{0} = +\infty \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$. Отсюда $z_3 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$

Арифметические действия над комплексными числами в тригонометрической форме

1. Умножение комплексных чисел

Произведением комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).} \tag{1.7}$$

Формула получена следующим образом:

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \\ + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются. Это правило распространяется на любое конечное число множителей.

2. Возведение комплексных чисел в натуральную степень

Для возведения комплексного числа в натуральную степень нужно возвести в эту степень модуль этого числа, а аргумент умножить на показатель степени.

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).} \tag{1.8}$$

Эта формула называется **формулой Муавра**[4].

[4] Абрахам де Муавр (1667–1754) – английский математик, член Лондонского королевского общества, Парижской и Берлинской академий наук.

Деление комплексных чисел

Частным двух комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right).} \tag{1.9}$$

Таким образом, при делении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули делятся, а аргументы вычитаются.

3. Извлечение корня из комплексного числа

Корнем *n*-й степени из комплексного числа $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.} \tag{1.10}$$

<u>*Пример 1.4.*</u> Найти значения: а) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{10}$; б) $\sqrt[3]{-1}$.

<u>*Решение.*</u> а) Запишем число $z = 1 + \sqrt{3}i$ в тригонометрической форме:

$$r = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2; \qquad tg\varphi = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; \varphi = \frac{\pi}{3} \;\Rightarrow\; z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

По формуле Муавра имеем

$$z^{10} = \left(1+\sqrt{3}i\right)^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}\right) = 2^{10}\left(\cos\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2^{10}\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1024\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -512 - 512\sqrt{3}i.$$

б) Запишем подкоренное число $z = -1$ в тригонометрической форме: $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$. Поэтому $\sqrt[3]{-1} = \cos\dfrac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\dfrac{\pi + 2\pi k}{3}$, $\quad k = 0, 1, 2.$

При $k = 0$ получаем $z_1 = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

при $k = 1$ получаем $z_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$;

при $k = 2$ получаем $z_3 = \cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Таким образом, $\sqrt[3]{-1} = \left\{\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i;\quad -1;\quad \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.