Тема 10

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лекция 10.1. Дифференциальные уравнения первого порядка, их виды и методы решения

План

1. *Задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения*
2. *Понятие дифференциального уравнения и его решения.*
3. *Дифференциальное уравнение первого порядка. Задача Коши.*
4. *Основные виды дифференциальных уравнений первого порядка.*

1. Задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения

Пример 10.1. Найти период полураспада (промежуток времени t, через который масса вещества уменьшается в 2 раза) радиоактивного вещества.

Решение. Пусть в начальный момент времени масса радиоактивного вещества равна m_0. Экспериментально установлено, что скорость уменьшения массы вещества $m(t)$ со временем t пропорциональна его количеству, то есть $m'(t) = -k \cdot m(t)$, где $k > 0$. Интегрируя это уравнение, получаем общий вид искомой функции $m(t) = Ce^{-kt}$.

Учитывая, что при $t = 0 \quad \Rightarrow C = m_0$ (так как $m_0 = Ce^{-k0} = C \cdot 1 = C$), получаем $m(t) = m_0 e^{-kt}$.

Учитывая, что масса должна уменьшиться вдвое, то

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-kt} \quad \Rightarrow \quad e^{-kt} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -kt = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 2}{-k}$$

и при $k = 0{,}000447$ период полураспада составит $t = 1550$ лет.

Пример 10.2. Найти кривую, проходящую через точку $M(0;\,2)$ и обладающую свойством, что в любой ее точке угловой коэффициент касательной равен удвоенной абсциссе точки касания.

Решение. Пусть уравнение искомой кривой имеет вид $y = f(x)$. Условие, равенства углового коэффициента касательной удвоенной абсциссе точки касания можно записать в виде $tg\alpha = 2x$, где α – угол наклона касательной. Так как $tg\alpha = y'$, то $y' = 2x$ и решение этого дифференциального уравнения и есть искомая кривая. Интегрируя это уравнение, получаем общий вид искомой кривой $y = x^2 + C$. Учитывая, что кривая проходит через заданную точку $M(0;\,2)$, найдем $C = 2$. Таким образом, уравнение искомой кривой имеет вид $y = x^2 + 2$, это парабола, проходящая через точку M.

2. Понятие дифференциального уравнения и его решения

Обыкновенным дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные различных порядков $y';\, y'';\, y''';\ldots;\, y^{(n)}$:

$$\boxed{F(x;\, y;\, y';\, y'';\, y''';\ldots;\, y^{(n)}) = 0.} \qquad (10.1)$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.

Например, $y' - 3xy^2 + 4 = 0$ и $x^2 \dfrac{dy}{dx} = 2xy + 3 -$ дифференциальные уравнения первого порядка; $y'' + y - y = \sin x -$ дифференциальное уравнение второго порядка; $(y''')^4 = y' \sin x -$ дифференциальное уравнение третьего порядка.

Решением дифференциального уравнения (10.1) называется такая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество. График функции $\varphi(x)$ называется **интегральной кривой**.

Решить дифференциальное уравнение, значит, найти функцию $y = \varphi(x)$, являющуюся решением. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется **интегрированием** этого уравнения.

3. Дифференциальное уравнение первого порядка. Задача Коши

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$\boxed{F(x;\, y;\, y') = 0,} \qquad (10.2)$$

где x – независимая переменная, $y = y(x)$ – дифференцируемая функция, y' – производная этой функции по переменной x.

Уравнение вида

$$\boxed{y' = f(x, y)} \qquad (10.3)$$

называется **уравнением, разрешенным относительно производной** или **уравнением в явной форме**.

Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, уравнение (10.3) можно записать в виде

$$\boxed{P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.} \qquad (10.4)$$

Это **дифференциальная форма записи** дифференциального уравнения.

Для дифференциального уравнения существует несколько видов решений: общее решение, частное решение и особое решение.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется семейство функций $y = \varphi(x; C)$, зависящих от x и от произвольной постоянной и обращающих это уравнение в тождество.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется всякое решение $y = \varphi(x; C_0)$, полученное из общего решения при фиксированном значении $C = C_0$.

Особое решение дифференциального уравнения не описывается общим интегралом и не выводится из общего решения ни при каком значении постоянной C. Например, функция $y = 0$ является решением дифференциального уравнения $(y')^2 - 4y = 0$, однако она не содержится в общем решении этого уравнения $y = (x + C)^2$.

Задача Коши – задача нахождения частного решения уравнения $y' = f(x, y)$ при заданном начальном условии: $y(x_0) = y_0$.

Теорема 10.1. *(о существовании и единственности решения задачи Коши).* Если в уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и ее частная производная f'_y непрерывна в области D на плоскости xOy, содержащей некоторую точку $(x_0; y_0)$, то существует единственное решение этого уравнения $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее условию $\varphi(x_0) = y_0$.

Геометрический смысл теоремы заключается в следующем: существует и при том единственная функция $y = \varphi(x)$, график которой проходит через точку $(x_0; y_0)$.

Пример 10.3. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y' = 2x$, проходящую через точку $M(1; 1)$.

Решение. Общим решением уравнения является функция вида $y = x^2 + C$, где C – произвольная константа. Функции $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 + 2$, полученные из общего решения при конкретных значениях C, являются частными решениями данного уравнения. Построив графики решения при различных значениях C, получим бесконечное множество непересекающихся интегральных кривых, которое будем называть **семейством интегральных кривых** (рис. 10.1).

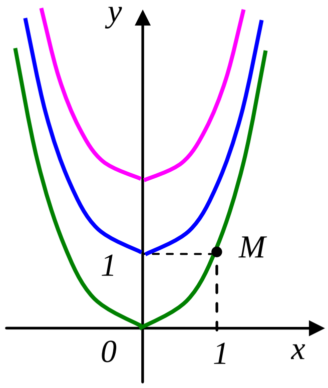

Рис. 10.1

Построим интегральную кривую, проходящую через точку $M(1;1)$. Для этого требуется решить задачу Коши с начальным условием $y(1)=1$. Подставим значения $x_0=1$, $y_0=1$ в общее решение. Полученное равенство $1=1^2+C$ решим относительно C, получим $C=0$. Таким образом, решением поставленной задачи Коши является функция $y=x^2$, интегральная кривая, которой проходит через точку $M(1;1)$, и ее график выделен жирной линией.

4. Основные виды дифференциальных уравнений первого порядка

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными (ДУсРП) называется уравнение вида

$$\boxed{P_1(x)Q_1(y)dx+P_2(x)Q_2(y)dy=0,} \qquad (10.5)$$

где $P_1(x), P_2(x)-$ функции только от x, а $Q_1(y), Q_2(y)-$ функции только от y.

Для отыскания решения такого уравнения его следует преобразовать к виду, в котором дифференциал и функции переменной x окажутся в одной части равенства, а переменной $y-$ в другой, то есть к виду дифференциального **уравнения с разделенными переменными**

$$\boxed{P(x)dx=Q(y)dy.} \qquad (10.6)$$

Общее решение уравнения (10.6) можно найти, проинтегрировав обе части полученного равенства:

$$\int P(x)dx=\int Q(y)dy+C.$$

<u>*Пример 10.4*</u>. Решить уравнение: $(1+x)ydx+(1-y)xdy=0.$

<u>*Решение*</u>. Это ДУсРП, так как при dx и при dy стоят произведения функций, каждая из которых зависит либо только от x, либо только от y.

Разделим обе части уравнения на произведение xy:

$$\frac{1+x}{x}dx=-\frac{1-y}{y}dy \text{ или } \left(\frac{1}{x}+1\right)dx=\left(1-\frac{1}{y}\right)dy;\ \int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx=\int\left(1-\frac{1}{y}\right)dy;$$

$\ln|x| + x = y - \ln|y| + C$ или $\ln|xy| + x - y = C -$ общее решение.

Не все ДУ первого порядка являются ДУсРП.

Однородные дифференциальные уравнения

Понятие однородного уравнения связано с однородными функциями.

Функция $f(x, y)$ называется **однородной функцией *n*-го порядка** относительно переменных x и y, если при любом числе λ имеет место равенство

$$\boxed{f(\lambda x; \lambda y) = \lambda^n f(x; y).} \qquad (10.7)$$

<u>*Пример 10.5.*</u> Выяснить, являются ли однородными функции:

а) $f(x; y) = x^3 + 3x^2 y$; б) $f(x; y) = \dfrac{3y - 2x}{x + y}$; в) $f(x; y) = x^2 y + 1$.

<u>*Решение*</u>.

а) Так как

$$f(\lambda x; \lambda y) = (\lambda x)^3 + 3(\lambda x)^2 \lambda y = \lambda^3 x^3 + 3\lambda^3 x^2 y = \lambda^3 \left(x^3 + 3x^2 y\right) = \lambda^3 f(x; y),$$

то данная функция однородная 3-го порядка.

б) Так как $f(\lambda x; \lambda y) = \dfrac{3\lambda y - 2\lambda x}{\lambda x + \lambda y} = \dfrac{\lambda(3y - 2x)}{\lambda(x + y)} = \dfrac{3y - 2x}{x + y} = \lambda^0 f(x; y)$, то данная функция однородная 0-го порядка.

в) Так как $f(\lambda x; \lambda y) = (\lambda x)^2 \lambda y + 1 = \lambda^3 x^2 y + 1 \neq \lambda^n f(x; y)$, то данная функция неоднородная.

Однородным дифференциальным уравнением первого порядка (ОДУ) называется уравнение

$$\boxed{P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0,} \qquad (10.8)$$

где $P(x, y), Q(x, y) -$ однородные функции одинакового порядка.

Однородным дифференциальным уравнением первого порядка (ОДУ) называется уравнение

$$\boxed{y' = f(x; y),} \qquad (10.9)$$

если $f(x; y) -$ однородная функция нулевого порядка.

ОДУ можно записать в виде $y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Так как $f(x; y) -$ однородная функция нулевого порядка, то $f(\lambda x; \lambda y) = f(x; y)$. Положив $\lambda = \dfrac{1}{x}$, получим

$$f(x; y) = f\left(\frac{x}{x}; \frac{y}{x}\right) = f\left(1; \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Решение ОДУ проводится путем введения новой переменной

$$\boxed{\frac{y}{x}=t} \text{ или } \boxed{y=tx,} \tag{10.10}$$

что позволяет свести это уравнение к ДУсРП.

<u>*Пример 10.6.*</u> Решить уравнение $(x-y)ydx-x^2dy=0$.

<u>*Решение*</u>. Заданное ДУ не является ДУсРП. Убедимся, что это ОДУ.

$P(x,y)=(x-y)y$, то $P(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x-\lambda y)\lambda y=\lambda^2(x-y)y=\lambda^2P(x;y)$;

$Q(x,y)=-x^2$, то $Q(\lambda x,\lambda y)=-(\lambda x)^2=\lambda^2\left(-x^2\right)=\lambda^2Q(x;y)$.

Значит, $P(x,y), Q(x,y)-$ однородные функции одинакового (2-го) порядка.

Преобразуем исходное уравнение к виду $y'=\dfrac{(x-y)y}{x^2}$.

Введем новую переменную $\dfrac{y}{x}=t$, тогда $y=tx$, $y'=t'x+t$.

Получим уравнение $t'x+t=\dfrac{(x-tx)tx}{x^2}$.

Проведем ряд алгебраических преобразований:

$$t'x+t=(1-t)t \quad\Rightarrow\quad t'x=(1-t)t-t \quad\Rightarrow\quad t'x=-t^2 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{dt}{dx}x=-t^2 \quad\Rightarrow\quad -\frac{dt}{t^2}=\frac{dx}{x}.$$

Получили ДУсРП. Решим его.

$$-\int\frac{dt}{t^2}=\int\frac{dx}{x}+C \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{t}=\ln|x|+C, \text{ пусть } C=\ln C,$$

Возвращаясь к исходной функции, получим $\dfrac{x}{y}=\ln|Cx|-$ общее решение.

Линейные дифференциальные уравнения. Уравнение Бернулли

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка (ЛДУ) называется уравнение вида:

$$\boxed{y'+P(x)y=Q(x),} \tag{10. 11}$$

где $P(x)$ и $Q(x)-$ функции от x (или постоянные).

Особенность ЛДУ первого порядка – искомая функция y и ее производная y' входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь между собой.

Решение ЛДУ сводится к решению двух ДУсРП подстановкой

$$\boxed{y=uv,} \tag{10.12}$$

где $u = u(x)$, $v = v(x) -$ функции от x, одна из которых может быть выбрана произвольно, а другая определяется уравнением (10.11).

Пусть $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, тогда, подставив в уравнение (10.11), получаем

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x) \quad \Rightarrow \quad u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x).$$

Выберем функции u и v таковыми, чтобы

$$\begin{cases} v' + P(x)v = 0, \\ u'v = Q(x). \end{cases}$$

Решая первое вспомогательное уравнение относительно функции v, получим частное решение $-v(x)$ (можем взять любое частное решение, например, при $C = 0$). Решая второе вспомогательное уравнение относительно функции u, находим общее решение в виде $u = u(x;C)$. Подставляя найденные $v(x)$ и $u(x;C)$ в формулу (10.12), получаем $y = u(x;C) \cdot v(x) -$ общее решение ЛДУ.

<u>*Пример 10.7*</u>. Найти общее решение уравнения $y' - \dfrac{y}{x} = x\cos x.$

<u>*Решение.*</u> Заданное ДУ не является ДУсРП и ОДУ. Это ЛДУ, в котором $P(x) = -\dfrac{1}{x}$, $Q(x) = x\cos x$. Будем искать решение в виде $y = uv$.

Подставляя $y = uv$ и $y' = u'v + uv'$ в ЛДУ, получим:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x\cos x \quad \Rightarrow \quad u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = x\cos x.$$

Решая первое вспомогательное уравнение $v' - \dfrac{v}{x} = 0$, получим

$$v' = \frac{v}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = \ln|x| \quad \Rightarrow \quad v = x.$$

Подставляя найденную функцию $v = x$, получим второе вспомогательное уравнение $u'x = x\cos x \quad \Rightarrow \quad u' = \cos x \quad \Rightarrow \quad u = \sin x + C$. Таким образом, общее решение исходного ЛДУ имеет вид $y = (\sin x + C)x$.

Уравнение Бернулли имеет вид

$$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)y^n.} \qquad (10.13)$$

По общей структуре напоминает ЛДУ, но характерным признаком, по которому можно определить уравнения Бернулли, является наличие функции y^n. Решается подстановкой $y = u \cdot v$.

Лекция 10.2. Дифференциальные уравнения высших порядков

План

1. *Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижения порядка.*
2. *Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.*
3. *Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.*

На практике достаточно часто встречаются дифференциальные уравнения не первого, а более высокого порядка, в которые входят вторая, третья и другие производные искомой функции.

1. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижения порядка

Рассмотрим три типа уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка, то есть позволяющие свести их решение к решению дифференциальных уравнений первого порядка.

1-й тип. Уравнение вида $\boxed{y'' = f(x).}$ (10.14)

Решается последовательным двукратным интегрированием правой части:

$$y' = \int f(x)dx + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx \quad \Rightarrow \quad y = \iint f(x)dxdx + C_1x + C_2.$$

Замечание. Уравнение $y^{(n)} = f(x)$ решается *n*-кратным интегрированием.

Пример 10.8. Решить уравнение $y'' = \cos 3x$.

Решение. Интегрируя последовательно два раза уравнение, получим

$$y' = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x + C_1,$$

$$y = \int\left(\frac{1}{3}\sin 3x + C_1\right)dx = -\frac{1}{9}\cos 3x + C_1x + C_2.$$

2-й тип. Уравнение вида $\boxed{y'' = f(x, y'),}$ (10.15)

не содержащее явно искомой функции y.

Решается подстановкой $y' = p$, где $p = p(x)$ – новая неизвестная функция и приводится к уравнению первого порядка: $p' = f(x; p)$, где $y'' = p'$. Решая это уравнение, получаем общее решение в виде $p = \varphi(x; C_1)$

или $y'=\varphi(x;C_1)$. Общее решение исходного уравнения будет иметь вид $y=\int\varphi(x;C_1)dx+C_2$.

Пример 10.9. Решить уравнение $y''+\dfrac{y'}{x}=0$.

Решение. Это уравнение не содержит явно функции y. Положим $y'=p$, тогда $y''=p'$. Уравнение перепишется:

$$p'+\frac{p}{x}=0 \quad\Rightarrow \frac{dp}{dx} = -\frac{p}{x} \quad\Rightarrow \frac{dp}{p}=-\frac{dx}{x}.$$

Решим ДУсРП путем интегрирования обеих частей, получим:

$$\ln|p|=-\ln|x|+\ln|C_1| \quad\Rightarrow p=\frac{C_1}{x},\text{ где } C_1 - \text{ постоянная } (C_1\neq 0).$$

Так как $p=y'=\dfrac{dy}{dx}$, получим:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{C_1}{x} \quad\Rightarrow dy=\frac{C_1}{x}dx \quad\Rightarrow \int dy=\int\frac{C_1}{x}dx \quad\Rightarrow \quad y=C_1\ln|x|+C_2 \quad (C_2\neq 0).$$

3-й тип. Уравнение вида $\boxed{y''=f(y,y'),}$ (10.16)
не содержащее явно независимую переменную x.

Решается подстановкой $y'=p$, где $p=p(y)-$ новая неизвестная функция и приводится к уравнению $p'p=f(y,p)$, где $y''=p'p$. Решая это уравнение, получим общее решение $p=\varphi(y;C_1)$ или $y'=\varphi(y;C_1)$. Общее решение исходного уравнения будет иметь вид $\displaystyle\int\frac{dy}{\varphi(y;C_1)}=x+C_2$.

Пример 10.10. Решить уравнение $yy''-(y')^2=0$.
Решение. Это уравнение не содержит явно функции x. Положим $y'=p$, тогда $y''=p'p$. Уравнение перепишется:

$$yp'p-p^2=0 \quad\Rightarrow y\frac{dp}{dy}p-p^2=0 \quad\Rightarrow ypdp-p^2dy=0.$$

Решим ДУсРП, разделив обе части уравнения на $yp^2\neq 0$:

$$\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}.$$

Интегрируя, получим $\ln|p|=\ln|y|+\ln|C_1| \quad\Rightarrow \quad p=C_1y$, где C_1- постоянная $(C_1\neq 0)$. Так как $p=y'=\dfrac{dy}{dx}$, получим: $\dfrac{dy}{dx}=C_1y \quad\Rightarrow$

$\dfrac{dy}{y} = C_1 dx \quad \Rightarrow \quad \int \dfrac{dy}{y} = \int C_1 dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = C_1 x + C_2 \quad (C_2 \neq 0).$ Положим $C_2 = \ln|C_2|$, имеем $\ln|y| = C_1 x + \ln|C_2| \quad \Rightarrow \ln\left|\dfrac{y}{C_2}\right| = C_1 x \quad \Rightarrow \dfrac{y}{C_2} = e^{C_1 x}$, отсюда $y = C_2 e^{C_1 x} -$ общее решение уравнения.

2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x).$$

Если $a_0(x), a_1(x), a_2(x) -$ постоянные числа, то уравнение будем называть уравнением с постоянными коэффициентами. Кроме этого, будем считать, что коэффициент при второй производной равен 1.

Положим $a_0(x) = p; \quad a_1(x) = q; \quad f(x) = 0,$ где p и $q -$ произвольные числа.

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами (ЛОДУ) называется уравнение вида

$$\boxed{y'' + py' + qy = 0.} \qquad (10.17)$$

Общее решение ЛОДУ находится достаточно просто, если известны так называемые линейно независимые частные решения этого уравнения.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются **линейно независимыми** на множестве D, если их отношение не является постоянной величиной, то есть $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const.$

В противном случае функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются **линейно зависимыми.** Например, функции $y_1(x) = x$ и $y_2(x) = x^5$ $-$линейно независимые, а функции $y_1(x) = e^{2x}$ и $y_2(x) = 5e^{2x}$ $-$линейно зависимые.

Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ дифференцируемы, то функциональный определитель вида

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

называется **определителем Вронского,** или **вронскианом** этих функций.

Теорема 10.2. Для того чтобы функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ были линейно независимы на множестве D, необходимо и достаточно, чтобы их определитель Вронского не равнялся нулю на этом множестве.

Обозначим через $y_{оро}$ – общее решение однородного уравнения (10.17).

Теорема 10.3. *(о структуре общего решения ЛОДУ второго порядка).* Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два линейно независимых частных решения ЛОДУ $y'' + py' + qy = 0$, то функция $y_{оро} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ – общее решение этого уравнения, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Замечание. Не существует общего метода нахождения частных решений уравнения $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$, когда коэффициенты $a_1(x)$ и $a_2(x)$ переменные, но для случая, когда они являются константами, Эйлером создан очень удобный метод нахождения частных решений.

Характеристические уравнения для ЛОДУ второго порядка

Будем искать решение $y'' + py' + qy = 0$ в виде $y = e^{kx}$, где k – число.

Очевидно, что $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Подставим эти выражения в уравнение

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0 \Leftrightarrow e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0 \Leftrightarrow \left(e^{kx} \neq 0\right) \quad k^2 + pk + q = 0.$$

Уравнение $\boxed{k^2 + pk + q = 0}$ (10.18)

называется **характеристическим** уравнением ЛОДУ $y'' + py' + qy = 0$.

Характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$ есть алгебраическое квадратное уравнение, имеющее два корня k_1 и k_2. Эти корни, в зависимости от дискриминанта, могут быть действительными и не равными друг другу, действительными и равными и комплексно-сопряженными.

1. Если $D > 0,$ то $k_1 \neq k_2 \in R,$ то есть корни действительные и не равные друг другу. Функции $y_1(x) = e^{k_1 x}$ и $y_2(x) = e^{k_2 x}$ являются частными решениями уравнения (10.17). Эти решения линейно независимы, так как $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = \dfrac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const.$ Следовательно, по теореме 10.3 общее решение ЛОДУ второго порядка имеет вид:

$$\boxed{y_{оро} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.} \tag{10.19}$$

2. Если $D = 0,$ то $k_1 = k_2 = k \in R,$ то есть корни действительные и равные друг другу. Одним из частных решений будет функция $y_1(x) = e^{kx}.$

Покажем, что функция $y_2(x)=xe^{kx}$ также является частным решением уравнения (10.17). Для этого найдем производные функции

$$y_2'(x)=e^{kx}+xke^{kx}; \qquad y_2''(x)=ke^{kx}+ke^{kx}+k^2xe^{kx}=2ke^{kx}+k^2xe^{kx}$$

и подставим их в уравнение, учитывая, что для k как корня характеристического уравнения справедливы равенства $k^2+pk+q=0$; $k=-\frac{p}{2}$:

$$\left(2ke^{kx}+xk^2e^{kx}\right)+p\left(e^{kx}+xke^{kx}\right)+qxe^{kx}=e^{kx}\left(2k+xk^2+p+pxk+qx\right)=$$
$$=e^{kx}\left(2k+p+\left(k^2+pk+q\right)\right)=e^{kx}(-p+p+x\cdot 0)=e^{kx}\cdot 0=0.$$

Итак, $y_1(x)=e^{kx}$ и $y_2(x)=xe^{kx}$ являются частными решениями (10.17). Кроме того, они линейно независимы, так как $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}=\frac{e^{kx}}{xe^{kx}}=\frac{1}{x}\neq const.$

Следовательно, по теореме 10.3 общее решение ЛОДУ имеет вид:

$$\boxed{y_{opo}=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}} \text{ или } \boxed{y_{opo}=e^{kx}(C_1+C_2x).} \qquad (10.20)$$

3. Если $D<0$, то $k_1,k_2\notin R$, то есть корни комплексно сопряженные числа: $k_1=\alpha+\beta i$, $k_2=\alpha-\beta i$. Простой подстановкой функций и их производных в уравнение можно показать, что функции $y_1(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_2(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x$ являются частными решениями уравнения (10.17), кроме того, они линейно независимы. Следовательно, по теореме 10.3 общее решение ЛОДУ имеет вид:

$$\boxed{y_{opo}=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x} \text{ или } \boxed{y_{opo}=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).} \; (10.21)$$

Пример 10.11. Найти общее решение ЛОДУ второго порядка
а) $y''+5y'+6y=0$; б) $y''-2y'+y=0$; в) $y''+2y'+5y=0$.

Решение. а) Составим характеристическое уравнение для ЛОДУ: $k^2+5k+6=0$. Найдем корни квадратного уравнения $k_1=-2$, $k_2=-3$. Корни действительные и не равные друг другу. Следовательно, общее решение ЛОДУ имеет вид: $y_{opo}=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$.

б) Составим характеристическое уравнение для данного ЛОДУ: $k^2 - 2k + 1 = 0$. Найдем корни квадратного уравнения $k_1 = k_2 = k = 1$. Корни действительные и равные друг другу. Следовательно, общее решение ЛОДУ имеет вид: $y_{оро} = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

в) Составим характеристическое уравнение для данного ЛОДУ: $k^2 + 2k + 5 = 0$.

Найдем корни квадратного уравнения $k_1 = -1 + 2i$; $k_2 = -1 - 2i$, где $\alpha = -1$, $\beta = 2$. Корни комплексные и сопряженные. Следовательно, общее решение ЛОДУ имеет вид: $y_{оро} = e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$.

<u>*Пример 10.12.*</u> Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию $y'' + 9y' = 0 \qquad y(0) = 1;\ y'(0) = 9$.

<u>*Решение*</u>. Составим характеристическое уравнение: $k^2 + 9k = 0$ или $k(k+9) = 0$, или $k_1 = 0, k_2 = -9$. Следовательно, общее решение ЛОДУ имеет вид: $y_{оро} = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-9x} = C_1 + C_2 e^{-9x}$.

Найдем частное решение путем вычисления C_1 и C_2 из системы

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 9. \end{cases}$$

Найдем $y' = \left(C_1 + C_2 e^{-9x}\right)' = -9C_2 e^{-9x}$. Подставим в $y_{оро}$ и $y'_{оро}$ у получим:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -9C_2 = 9, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = -1. \end{cases}$$

Частное решение ЛОДУ имеет вид: $y_{чр} = 2 - e^{-9x}$.

3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами (ЛНДУ) называется уравнение вида

$$\boxed{y'' + py' + qy = f(x),} \tag{10.22}$$

где p и q – действительные числа; $f(x)$ – правая часть уравнения.

Уравнение $y'' + py' + qy = 0$, левая часть которого совпадает с левой частью уравнения (10.22), называется **соответствующим однородным уравнением**.

Теорема 10.4. *(о структуре общего решения ЛНДУ второго порядка).* Общее решение $y_{чр} = 2 - e^{-9x}$. ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами есть сумма общего решения $y_{орн}$ соответствующего ему однородного уравнения и частного решения $y_{чрн}$ этого неоднородного уравнения

$$\boxed{y_{орн} = y_{оро} + y_{чрн}.} \tag{10.23}$$

Как находить $y_{орн}$, рассматривалось в предыдущем пункте. Нахождение $y_{чрн}$ существенно зависит от вида правой части уравнения (10.22). Будем рассматривать ЛНДУ, у которого правая часть имеет вид:

1) $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ или 2) $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x,$

где $\alpha, \beta, a, b -$ произвольные числа.

Для этих двух случаев $y_{чрн}$ может быть найдено по методу неопределенных коэффициентов, суть которого состоит в следующем. По виду правой части ЛНДУ записывают ожидаемую форму частного решения в виде, соответствующем правой части уравнения с неопределенными коэффициентами. Затем подставляют эту форму частного решения в ЛНДУ и из полученного тождества находят значения коэффициентов.

1) Пусть правая часть ЛНДУ представляет собой произведение показательной функции на многочлен: $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, $n -$ степень многочлена, $\alpha -$ постоянная величина. Если $\alpha = 0$, то $f(x) = P_n(x)$.

Тогда частное решение этого уравнения имеет вид:

$$y_{чрн} = x^r R_n(x)e^{\alpha x},$$

где $r -$ кратность, с которой α входит в число корней характеристического уравнения; $R_n(x) -$ многочлен степени n с неопределенными коэффициентами. Очевидно, что r может принимать одно из трех значений:

$r = 0$, если α не является корнем характеристического уравнения;

$r = 1$, если $\alpha -$ однократный корень характеристического уравнения;

$r = 2$, если $\alpha -$ двукратный корень характеристического уравнения.

<u>*Пример 10.13.*</u> Найти общее решение уравнения

$y'' + 3y' + 2y = 2x^2 - 4x - 17.$

<u>*Решение*</u>. По теореме (10.4) $y_{орн} = y_{оро} + y_{чрн}$. Значит, решение задачи состоит из двух этапов – поиска $y_{оро}$ и $y_{чрн}$.

Найдем $y_{оро}$: характеристическое уравнение $k^2+3k+2=0$. Найдем корни квадратного уравнения $k_1=-1$; $k_2=-2$. Следовательно, общее решение однородного уравнения есть функция $y_{оро}=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$.

Найдем $y_{чрн}$: правая часть $f(x)=2x^2-4x-17$.

Значит, $\alpha=0,\quad r=0,\quad n=2$.

Отсюда ожидаемая форма частного решения ЛНДУ имеет вид:

$$y_{чрн}=R_2(x)=Ax^2+Bx+C,$$

где $A, B, C-$ неопределенные коэффициенты.

Найдем первую и вторую производные $y'_{чрн}=2Ax+B,\quad y''_{чрн}=2A,$ и подставим их в ЛНДУ: $2A+3(2Ax+B)+2\left(Ax^2+Bx+C\right)=2x^2-4x-17\Rightarrow$ $\Rightarrow 2Ax^2+(6A+2B)x+(2A+3B+2C)=2x^2-4x-17.$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего равенства, получим систему уравнений:

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{array}\begin{cases} 2A=2, \\ 6A+2B=-4, \\ 2A+3B+2C=-17, \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} A=1, \\ B=-5, \\ C=-2. \end{cases}$$

Подставим найденные значения в ожидаемую форму $y_{чрн}=x^2-5x-2$. Тогда общее решение ЛНДУ равно $y_{орн}=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+x^2-5x-2$.

Пример 10.14. Найти общее решение уравнения $y''+y'-2y=xe^x$.

Решение. По теореме (10.4) $y_{орн}=y_{оро}+y_{чрн}$. Значит, решение задачи состоит из двух этапов – поиска $y_{оро}$ и $y_{чрн}$.

Найдем $y_{оро}$: характеристическое уравнение $k^2+k-2=0$. Найдем корни квадратного уравнения $k_1=-2$; $k_2=1$. Следовательно, общее решение однородного уравнения есть функция $y_{оро}=C_1e^{-2x}+C_2e^x$.

Найдем $y_{чрн}$: правая часть $f(x)=xe^x$.

Следовательно, $\alpha=1,\quad r=1,\quad n=1$.

Отсюда, ожидаемая форма частного решения ЛНДУ имеет вид:

$$y_{чрн}=xe^x(Ax+B)=e^x\left(Ax^2+Bx\right),$$

где $A, B-$ неопределенные коэффициенты.

Найдем производные:

$$y'_{чрн}=e^x\left(Ax^2+Bx\right)+e^x(2Ax+B)=e^x\left(Ax^2+(B+2A)x+B\right),$$

$$y''_{чрн}=e^x\left(Ax^2+(B+4A)x+B+2A\right)$$

и подставим в ЛНДУ:

$$e^x\left(Ax^2+(B+4A)x+B+2A\right)+e^x\left(Ax^2+(B+2A)x+B\right)-2e^x\left(Ax^2+Bx\right)=xe^x.$$

Разделив обе части уравнения на $e^{x} \neq 0$, раскрыв скобки и приведя подобные, получим $6Ax + 2(A+B) = x$.

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего равенства, получим систему уравнений:

$$\begin{matrix} x^1: \\ x^0: \end{matrix} \quad \begin{cases} 6A = 1, \\ 2(A+B) = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{6}, \\ B = -\dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

Подставим найденные значения в формулу $y_{чрн} = xe^{x}\left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}\right)$. Тогда общее решение ЛНДУ равно $y_{орн} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} + \frac{1}{6}xe^{x}(x-1)$.

2) Пусть правая часть ЛНДУ представляет собой

$f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x,$

где $a, b, \beta -$ числа $(\beta \neq 0)$.

Тогда частное решение этого уравнения имеет вид:

$y_{чрн} = x^{r}(A\cos\beta x + B\sin\beta x),$

где $r -$ кратность, с которой чисто мнимое комплексное число βi входит в число корней характеристического уравнения.

<u>*Пример 10.15.*</u> Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' = 15\cos 3x - 30\sin 3x$.

<u>*Решение*</u>. По теореме (10.4) $y_{орн} = y_{оро} + y_{чрн}$. Значит, ищем $y_{оро}$ и $y_{чрн}$.

Найдем $y_{оро}$: характеристическое уравнение $k^2 + 4k = 0$. Найдем корни квадратного уравнения $k_1 = -4$; $k_2 = 0$. Следовательно, общее решение однородного уравнения есть функция $y_{оро} = C_1 e^{-4x} + C_2$.

Найдем $y_{чрн}$: правая часть $f(x) = 15\cos 3x - 30\sin 3x$. Следовательно, $\beta = 3$ и $r = 0$, так как характеристическое уравнение не имеет комплексного корня $3i$.

Отсюда, ожидаемая форма частного решения ЛНДУ имеет вид:

$y_{чрн} = A\cos 3x + B\sin 3x,$

где $A, B -$ неопределенные коэффициенты.

Найдем первую $y'_{чрн} = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x$ и вторую производные $y''_{чрн} = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$ и подставим их в уравнение:

$(-9\cos 3x - 9\sin 3x) + 4(-3\sin 3x + 3\cos 3x) = 15\cos 3x - 30\sin 3x.$

Перегруппируем, собрав члены, содержащие $\cos 3x$ и $\sin 3x$:

$(-9A + 12B)\cos 3x + (-3B - 12A)\sin 3x = 15\cos 3x - 30\sin 3x$

Приравняв коэффициенты при $\cos 3x$ и $\sin 3x$ в левой и правой частях последнего равенства, получим систему уравнений:

$$\begin{array}{l} \cos 3x: \\ \sin 3x: \end{array} \begin{cases} -9A + 12B = 15, \\ -9B - 12A = -30, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = 2. \end{cases}$$

Подставим найденные значения в формулу $y_{чрн} = \cos 3x + 2\sin 3x$. Тогда общее решение ЛНДУ равно $y_{орн} = C_1 e^{-4x} + C_2 + \cos 3x + 2\sin 3x$.

Замечание. Если требуется найти частное решение ЛНДУ, удовлетворяющее начальным условиям, то поступают так:

1) находят общее решение ЛНДУ $- y_{орн}$;

2) составляют СЛАУ относительно C_1 и C_2, используя начальные условия;

3) находят C_1 и C_2;

4) записывают частное решение ЛНДУ $- y_{чрн}$.