Тема 2

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Лекция 2.1. Матрицы и определители. Формулы Крамера

План

1. *Понятие системы линейных алгебраических уравнений.*
2. *Понятие матрицы, виды матриц.*
3. *Определители и их свойства. Формулы Крамера.*

1. Понятие системы линейных алгебраических уравнений

Система m **линейных уравнений с** n **неизвестными** (СЛАУ) записывается в общем виде следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.1}$$

Числа $a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn}$ называются **коэффициентами,** $b_1, b_2, ..., b_m$ – **свободными членами** системы, $x_1, x_2, ..., x_n$ – неизвестными.

СЛАУ (2.1) называется **однородной**, если все ее свободные члены равны нулю, в противном случае СЛАУ называется **неоднородной.**

Упорядоченный набор чисел $(c_1; c_2; \ldots; c_n)$, обращающий каждое из уравнений системы в тождество, называется ее **решением.**

Система уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется **совместной**, в противном случае – **несовместной**. Совместная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной,** если она имеет более одного решения (рис. 2.1).

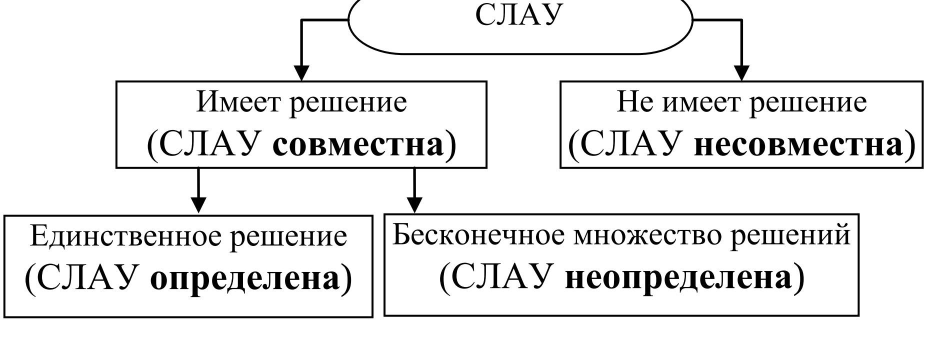


Рис. 2.1

Нетрудно понять, что решение СЛАУ полностью определяется коэффициентами системы и свободными членами. Поэтому встает вопрос: можно ли отдельно исследовать их, записав в виде компактных таблиц, а не переписывать каждый раз СЛАУ? Оказывается, можно. Таблицы, которыми пользуются при решении СЛАУ, назвали матрицами.

2. Понятие матрицы, виды матриц

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица, состоящая из m строк и n столбцов

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (2.2)$$

Горизонтальные ряды матрицы называют **строками,** вертикальные – **столбцами**. **Элементы матрицы** обозначают малыми буквами с двумя индексами a_{ij}, где i – номер строки, j – номер столбца. Элементами матрицы могут быть различные математические объекты – числа, функции, многочлены и т.д.

Матрицы, как правило, обозначаются большими латинскими буквами, например, $A;B;C\dots$; элементы матрицы записываются в круглых скобках.

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ – матрица A размера 3×4.

Две матрицы называются **равными**, если равны все соответствующие элементы этих матриц. Матрица называется **нулевой**, если все ее элементы равны нулю.

Матрица называется **квадратной порядка** n, если число столбцов матрицы равно числу ее строк и равно n.

Элементы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ квадратной матрицы порядка n образуют ее **главную диагональ**, а диагональ, идущая от правого верхнего к левому нижнему углу, называется **побочной диагональю** матрицы.

Квадратная матрица называется **диагональной**, если все ее элементы, расположенные вне главной диагонали равны нулю. Диагональная матрица называется **единичной**, если все ее элементы, расположенные на главной диагонали равны единице, и обозначают E. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

соответственно квадратная, диагональная и единичная матрицы третьего порядка.

Нулевая и единичная матрицы в матричном исчислении играют ту же роль, что и числа 0 и 1 в арифметике.

Матрица, состоящая из одной строки или одного столбца, называется соответственно **матрицей-строкой** или **матрицей-столбцом** (или вектором).

$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ – матрица-строка размера 1×3;

$C = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ – матрица-столбец 2×1.

Квадратная матрица называется **треугольной**, если все элементы, стоящие выше или ниже главной диагонали, равны нулю.

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, **транспонированной** к данной. Обозначается A^T.

3. Определители и их свойства. Формулы Крамера

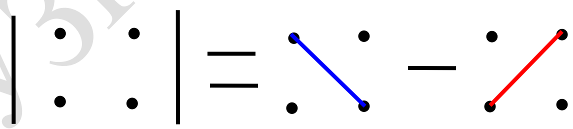
Квадратной матрице A может быть поставлено в соответствие число, называемое определителем (или детерминантом) и обозначаемое $|A|$ или Δ или $\det A$. Необходимость введения понятия определителя тесно связана с решением СЛАУ.

Определителем матрицы первого порядка называется единственный элемент этой матрицы. Например, для $A = (5)$ имеем $|A| = 5$.

Определителем матрицы второго порядка называется число, определяемое по формуле

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.} \qquad (2.3)$$

Способ его вычисления иллюстрируется схемой – **правило диагоналей**.



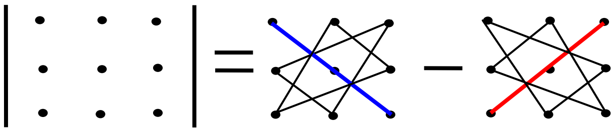
<u>*Пример 2.1*</u>. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

<u>*Решение.*</u> По правилу диагоналей $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 7 - 6 \cdot 2 = -19.$

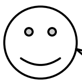
Определителем матрицы третьего порядка называется число, определяемое по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}. \qquad (2.4)$$

Для облегчения запоминания этой сложной формулы воспользуемся **правилом треугольника**, представимым следующей схемой.



Словами можно записать: со знаком «плюс» надо взять произведение элементов, стоящих на главной диагонали, и произведение элементов, стоящих в вершинах треугольников, чьи основания параллельны главной диагонали. Со знаком «минус» берутся аналогичные произведения, только относительно побочной диагонали.



Гадание по определителям:

$$\begin{vmatrix} \textit{Саша} & \textit{Даша} & 0 \\ 0 & \textit{любит} & \textit{не любит} \\ \textit{математику} & 0 & \textit{Дашу} \end{vmatrix} = \textit{Саша любит Дашу}, \\ \textit{Даша не любит математику}.$$

<u>*Пример 2.2.*</u> Найти определитель матицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

<u>*Решение.*</u> Согласно правилу треугольника

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 6 + 2\cdot 4\cdot(-2) + 0\cdot 5\cdot(-1) - (-2)\cdot 3\cdot(-1) - 0\cdot 2\cdot 6 - 4\cdot 5\cdot 1 = -24.$$

Для вычисления определителей высших порядков применяется формула, понижающая порядок и нам понадобятся вспомогательные понятия.

Минором M_{ij} **элемента** a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, содержащих элемент a_{ij}.

Алгебраическим дополнением A_{ij} **элемента** a_{ij} называется его минор M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.} \qquad (2.5)$$

Пример 2.3. Найти минор M_{23} и алгебраическое дополнение A_{23} для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -5; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^5 \cdot (-5) = 5.$$

Теорема 1 (*теорема разложения*). Определитель n-го порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т.е.

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, \text{ для любого } i = 1, 2, \ldots, n$$

или $\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$, для любого $j = 1, 2, \ldots, n$.

Пример 2.4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$:

а) разложением по элементам второго столбца;
б) разложением по элементам первой строки.

Решение.

а) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= -3(15-1) - 2(6-4) - 2(2-20) = -42 - 4 + 36 = -10;$$

б) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 2(-6-2) - 3(15-1) + 4(10+2) = -16 - 42 + 48 = -10.$$

Свойства определителей

Приведем основные свойства определителей без доказательства, при этом строки и столбцы будем просто называть рядами определителя.

1. «*Равноправность строк и столбцов*». Величина определителя не изменится, если строки заменить столбцами, а столбцы – соответствующими строками.

2. Общий множитель элементов какого-либо ряда можно вынести за знак определителя.

3. Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.

4. Если все элементы некоторого ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю.

5. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак на противоположный.

6. Если один из рядов определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.

7. «*Элементарные преобразования определителя*». Значение определителя не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число.

8. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

Формулы Крамера для решения СЛАУ

Рассмотрим СЛАУ n уравнений с n неизвестными вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (2.6)$$

Введем в рассмотрение определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

i -й столбец

Через Δ обозначен определитель системы, через Δ_i – определитель системы, в которой i -й столбец заменен на столбец свободных членов.

Теорема 2.2 (*правило Крамера*[1]). Если в системе n линейных уравнений с n неизвестными определитель $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое задается формулами

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \ldots; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.} \qquad (2.7)$$

Формулы (2.7) называют формулами Крамера.

Пример 2.5. Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2, \\ 2x - y + 2z = -2, \\ 4x + 3y - z = 1. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3(1-6) - 2(-2-8) + 1(6+4) = 15 \neq 0 \ \Rightarrow$$ система имеет единственное решение.

Вычислим определители $\Delta_1; \Delta_2; \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -15, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 30, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 15.$$

По формулам Крамера находим, что

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-15}{15} = -1, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{30}{15} = 2, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{15}{15} = 1.$$

Ответ: $x = -1, \quad y = 2, \quad z = 1.$

Замечание. Справедливы следующие утверждения:

1) если $\Delta = 0$ и хотя бы один из $\Delta_i \neq 0$, то система не имеет решения;

2) если $\Delta = 0$ и все $\Delta_i = 0$, то система либо не имеет решений, либо имеет бесконечное множество решений.

Лекция 2.2. Операции над матрицами. Решение систем матричным способом

П л а н

1. Арифметические операции над матрицами.
2. Понятие обратной матрицы и метод ее нахождения.
3. Решение СЛАУ матричным способом.

[1] Габриэль Крамер (1704–1752) – швейцарский математик, придумавший метод.

Формулы Крамера не являются единственными формулами, с помощью которых можно найти решение СЛАУ. Существует ряд других методов решений таких систем. В частности, СЛАУ может быть решена с помощью обратной матрицы. Для того чтобы это понять, необходимо разобраться с операциями, которые можно производить над матрицами.

1. Арифметические операции над матрицами

Над матрицами, как над числами, можно производить ряд операций, причем некоторые из них аналогичны числовым операциям, а некоторые носят особый характер.

1) *Сложение матриц*

Суммой двух матриц одинаковой размерности $A_{m\times n}=(a_{ij})$ и $B_{m\times n}=(b_{ij})$ называется матрица той же размерности $C_{m\times n}=(c_{ij})$, такая, что $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$.

Таким образом, чтобы сложить две матрицы, нужно сложить их соответствующие элементы.

<u>*Пример 2.6*</u>. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -4 & 5 & -6\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & 5 & 7\end{pmatrix}$;
$A+B=\begin{pmatrix}3 & 5 & -1\\ -4 & 10 & 1\end{pmatrix}$.

2) *Умножение матрицы на число*

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ **на число *k*** называется матрица $B_{m\times n}=(b_{ij})$, такая, что $b_{ij}=ka_{ij}$, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$.

Таким образом, чтобы умножить матрицу на число нужно все элементы данной матрицы умножить на это число.

<u>*Пример 2.7.*</u> Если $A=\begin{pmatrix}6 & 10 & 0\\ -8 & 5 & 1\end{pmatrix}$, то $3A=\begin{pmatrix}18 & 30 & 0\\ -24 & 15 & 3\end{pmatrix}$.

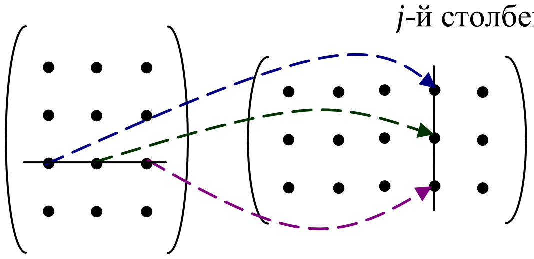
Следствие. Разность матриц $A-B$ можно определить так: $A-B=A+(-B)$.

3) *Умножение матриц*

Произведением матрицы $A_{m\times k}=(a_{ij})$ размера $m\times k$ на матрицу $B_{k\times n}=(b_{ij})$ размера $k\times n$ называется матрица $C_{m\times n}=(c_{ij})$ размера $m\times n$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Проиллюстрируем наглядно вычисление элемента c_{ij} :



Умножение матрицы A на матрицу B возможно, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

<u>*Пример 2.8*</u>. Вычислить AB и BA, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>*Решение*</u>. По определению произведения матриц $A_{2\times3}B_{3\times2} = C_{2\times2}$:

элемент c_{11} элемент c_{12}

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+0\cdot5+2\cdot(-2) & 1\cdot0+0\cdot0+2\cdot0 \\ 3\cdot(-1)+1\cdot5+0\cdot(-2) & 3\cdot0+1\cdot1+0\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

элемент c_{21} элемент c_{22}

По определению произведения матриц $B_{3\times2}A_{2\times3} = C_{3\times3}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot1+0\cdot3 & -1\cdot0+0\cdot1 & -1\cdot2+0\cdot0 \\ 5\cdot1+1\cdot3 & 5\cdot0+1\cdot1 & 5\cdot2+1\cdot0 \\ -2\cdot1+0\cdot3 & -2\cdot0+0\cdot1 & -2\cdot2+0\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 8 & 1 & 10 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Для произвольных матриц $AB \neq BA$.

2. Понятие обратной матрицы и метод ее нахождения

Квадратная матрица A называется **невырожденной**, если ее определитель не равен нулю. В противном случае, матрица называется **вырожденной**.

Матрица $\tilde{A}$ называется **дополнительной** к матрице A, если ее элементы есть алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A.

Матрица A^{-1} называется **обратной** для квадратной матрицы A, если

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = E.} \tag{2.8}$$

Теорема 3. Любая невырожденная квадратная матрица имеет обратную, которая может быть найдена по формуле

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(\tilde{A}\right)^T.} \tag{2.9}$$

Правило нахождения обратной матрицы

1) найти определитель матрицы $|A|$;

2) найти дополнительную матрицу $\tilde{A}$;

3) транспонировать дополнительную матрицу, то есть найти $(\tilde{A})^T$;

4) разделить каждый элемент транспонированной дополнительной матрицы на значение определителя $|A|$ исходной матрицы.

<u>*Пример 2.9*</u>. Найти обратную матрицу к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>*Решение*</u>.

1) Найдем определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -10 - 12 - 1 + 5 + 6 + 4 = -8.$$

2) найдем дополнительную матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ -7 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

3) транспонируем дополнительную матрицу $(\tilde{A})^T = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

4) найдем обратную матрицу, разделив каждый элемент транспонированной дополнительной матрицы на значение определителя $|A|$ исходной матрицы:

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{7}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Проверим, что обратная матрица найдена верно. Для этого найдем произведение обратной матрицы A^{-1} на исходную матрицу A.

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{7}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{4}-\frac{3}{8}+\frac{7}{8} & -\frac{4}{4}+\frac{15}{8}-\frac{7}{8} & \frac{1}{4}-\frac{9}{8}+\frac{7}{8} \\ -\frac{2}{4}-\frac{1}{8}+\frac{5}{8} & \frac{4}{4}+\frac{5}{8}-\frac{5}{8} & -\frac{1}{4}-\frac{3}{8}+\frac{5}{8} \\ -\frac{2}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} & \frac{4}{2}-\frac{5}{4}-\frac{3}{4} & -\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, обратная матрица найдена верно.

3. Решение СЛАУ матричным методом

Обратная матрица применяется для решения неоднородных СЛАУ n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2b} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – **основная матрица системы**;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – столбец переменных; $$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ – столбец свободных членов.

Учитывая правило умножения матриц, систему запишем в матричной форме $AX = B$ (так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы X, то их произведение существует и является матрицей-столбцом B).

Предположим, что квадратная матрица A невырожденная, то есть $|A| \neq 0,$ значит существует обратная матрица A^{-1}.

Матричное равенство $AX = B$ умножим слева на A^{-1} и получим:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B,$$
$$\left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}B,$$
$$EX = A^{-1}B,$$
$$X = A^{-1}B.$$

Итак, решением СЛАУ будет матрица-столбец

$$\boxed{X = A^{-1}B.} \tag{2.10}$$

Правило нахождения решения СЛАУ с помощью обратной матрицы

1) найти обратную матрицу A^{-1} для основной матрицы системы;

2) умножить найденную матрицу слева на столбец свободных членов B;

3) полученная матрица-столбец и будет решением системы.

<u>*Пример 2.10*</u>. Решить матричным методом систему $\begin{cases} 3x + 2y + z = 2, \\ 2x - y + 2z = -2, \\ 4x + 3y - z = 1. \end{cases}$

<u>*Решение.*</u> В данном примере

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

1) Найдем определитель матрицы A: $|A| = 15 \neq 0$;

2) найдем дополнительную матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 & 10 \\ 5 & -7 & -1 \\ 5 & -4 & -7 \end{pmatrix};$$

3) транспонируем дополнительную матрицу $(\tilde{A})^T = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 5 \\ 10 & -7 & -4 \\ 10 & -1 & -7 \end{pmatrix}$;

4) найдем обратную матрицу, разделив каждый элемент транспонированной дополнительной матрицы на значение определителя $|A|$ исходной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 5 \\ 10 & -7 & -4 \\ 10 & -1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{7}{15} & -\frac{4}{15} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{15} & -\frac{7}{15} \end{pmatrix}.$$

Тогда $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{7}{15} & -\frac{4}{15} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{15} & -\frac{7}{15} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $x = -1, y = 2, z = 1$.

Метод обратной матрицы и метод Крамера обладают рядом существенных недостатков. Оба эти метода достаточно трудоемки и применимы только для решения СЛАУ, в которых: 1) число уравнений равно числу неизвестных; 2) определитель основной матрицы системы отличен от нуля.

Универсальным и вычислительно эффективным является метод Гаусса, который позволяет решить СЛАУ с любым числом уравнений и неизвестных.

Лекция 2.3. Исследование и решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

П л а н

1. Ранг матрицы и его применение при исследовании СЛАУ.

2. Метод Гаусса решения СЛАУ.

1. Ранг матрицы и его применение при исследовании СЛАУ

С помощью нового понятия – ранга матрицы можно получить ответ на вопрос «Имеет ли СЛАУ решение и, если имеет, то сколько».

Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$.

Минором порядка *k* матрицы A называется определитель, получаемый из матрицы A выделением произвольных k строк и k столбцов. Так, минором третьего порядка будет определитель, составленный из элементов, стоящих на пересечении любых трех строк и любых трех столбцов матрицы A, минором второго порядка будет определитель, составленный из элементов, стоящих на пересечении любых двух строк и любых двух столбцов матрицы A, а минором первого порядка будет любой элемент матрицы A.

Например, для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ минора третьего порядка не существует; одним из миноров второго порядка будет определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$; минором первого порядка будет любой из элементов матрицы.

Итак, для прямоугольной (не квадратной) матрицы размера $m \times n$ наибольший порядок минора будет равен наименьшему из чисел m и n.

Рангом матрицы A называется наибольший порядок минора этой матрицы, отличного от нуля. Обозначение: $rangA$; $r(A)$.

Базисным минором называется любой из отличных от нуля миноров матрицы A, порядок которого равен рангу матрицы A.

Методы вычисления ранга

Рассмотрим два метода нахождения ранга матрицы:

<u>Метод окаймляющих миноров</u>

Пусть в матрице A найден ненулевой минор k-го порядка. Рассмотрим все миноры $(k+1)$-го порядка, окаймляющие найденный минор. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой, и вся процедура повторяется.

Этот метод является достаточно трудоемким. На практике чаще применяют другой метод нахождения ранга матрицы, состоящий в выполнении элементарных преобразований над матрицами, которые не меняют ее ранг.

Элементарными преобразованиями матриц являются:

1. Перестановка местами двух параллельных рядов матрицы.
2. Умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля.
3. Вычеркивание ряда, все элементы которого равны нулю.

4. Замена всех строк столбцами, а столбцов – соответствующими строками (транспонирование).

5. Прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Две матрицы называются ***эквивалентными*** $A \sim \widetilde{A}$, если одна матрица получается из другой с помощью элементарных преобразований.

Теорема 4 (*об инвариантности ранга при элементарных преобразованиях*). Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях.

Метод элементарных преобразований

Ранг матрицы равен числу ненулевых строк в матрице после приведения ее к ступенчатой форме при помощи элементарных преобразований над строками матрицы.

Пример 2.11. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Решение. Преобразуем матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \approx \begin{vmatrix} II-2I \\ III-5I \end{vmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix} \approx |III-II| \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдена матрица, которая эквивалентна матрице A, так как получена из нее с помощью конечного числа элементарных преобразований. Очевидно, что ранг полученной матрицы равен 2, следовательно, и $r(A) = 2$.

Введем понятие расширенной матрицы системы.

Расширенной матрицей системы $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$

называется матрица $\overline{A}$, состоящая из основной матрицы системы и дополненная столбцом свободных членов, то есть

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Ответ на вопрос о существовании и количестве решений СЛАУ дает теорема Кронекера – Капели.

Теорема Кронекера – Капелли[2]. СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу её расширенной матрицы. В частности:

---

[2] Леопольд Кронекер (1823–1891) – немецкий математик, один из приверженцев «арифметизации математики». Альфредо Капелли (1855–1910) – итальянский математик, член Национальной академии в Риме.

– если ранг матрицы системы равен числу неизвестных, то СЛАУ имеет единственное решение.

– если ранг матрицы системы меньше числа неизвестных, то СЛАУ имеет бесконечное множество решений.

Кратко теорема может быть записана так:

1. Если $rangA = rang\overline{A} = n,$ то СЛАУ имеет единственное решение.

2. Если $rangA = rang\overline{A} < n,$ то СЛАУ имеет множество решений.

3. Если $rangA < rang\overline{A},$ то СЛАУ не имеет решений.

2. Метод Гаусса решения СЛАУ

Метод Гаусса[3] – метод последовательного исключения неизвестных из уравнений системы. Этот метод принято представлять в виде двух этапов: прямого и обратного хода. **Прямой ход** состоит в последовательном исключении неизвестных. **Обратный ход** состоит в решении ступенчатой системы.

Рассмотрим этот метод на примере СЛАУ вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Предположим, что коэффициент $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то поменяем местами уравнения в системе). Исключим переменную x_1 из всех уравнений системы, кроме первого. Для этого, умножив обе части первого уравнения на $\left(-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right)$, сложим результат со вторым уравнением. Аналогично исключим x_1 из третьего уравнения, умножая первое уравнение на $\left(-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}\right)$ и прибавляя полученное уравнение к третьему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + c_{23}x_3 = d_2, \\ \qquad c_{32}x_2 + c_{33}x_3 = d_3. \end{cases}$$

На этом этапе первое уравнение сыграло свою роль и в дальнейшем просто переписывается. Теперь посредством второго уравнения из всех уравнений, начиная с третьего, по тому же принципу исключается

[3] Иоганн Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) – немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист. Считается «королем математиков» всех времен.

переменная x_2: умножив второе уравнение системы на $\left(-\frac{c_{32}}{c_{22}}\right)$, сложим результат с третьим уравнением:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \quad c_{22}x_2 + c_{23}x_3 = d_2, \\ \qquad p_{33}x_3 = q_3. \end{cases}$$

Прямой ход приводит СЛАУ к **ступенчатому виду**, где каждое следующее уравнение содержит на одну неизвестную меньше, чем предыдущее.

1) если $p_{33} \neq 0$, то система имеет единственное решение;

2) если $p_{33} = 0$, но $q_3 \neq 0$, то система несовместна, то есть не имеет решений (третье уравнение системы является противоречивым: $0 \cdot x_3 \neq 0$);

3) если $p_{33} = 0$ и $q_3 = 0$, то система имеет бесконечное множество решений.

Завершающий этап метода Гаусса, когда решается ступенчатая система, называется **обратным ходом**: из последнего уравнения выражается неизвестное x_3. Затем найденное значение x_3 подставляется в предпоследнее уравнение системы, что позволяет выразить x_2. Продолжая этот процесс мы выразим остальные переменные.

Замечание. Для сокращения записи и увеличения наглядности преобразования прямого хода метода Гаусса часто выполняют с расширенной матрицей системы, приводя ее к ступенчатому виду, а затем по полученной матрице восстанавливают систему.

<u>Пример 2.12</u>. Решить СЛАУ методом Гаусса $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 3x + 2y + z = 5, \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$

<u>Решение.</u> Выполняя прямой ход, сначала исключим переменную x из второго и третьего уравнения, затем y – из третьего уравнения:

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 3x + 2y + z = 5, \\ 4x - y + 5z = 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} II - 3I \\ III - 4I \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 0, \\ -y + 4z = 5, \\ -5y + 9z = 3, \end{cases} \Rightarrow \left| III - 5II \right| \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 0, \\ -y + 4z = 5, \\ -11z = -22. \end{cases}$$

Выполняя обратный ход, двигаясь по системе «снизу вверх»: из последнего $z = 2$. Подставляем это значение во второе уравнение, найдем $y = 3$. Затем, подставляя эти два найденных значения в первое уравнение, получим $x = -1$.

Таким образом, $x = -1;\ y = 3;\ z = 2.$

<u>Пример 2.13</u>. Решить СЛАУ методом Гаусса $\begin{cases} -3x+4y+2z=5, \\ x+2y-3z=4, \\ -4x+2y+5z=1. \end{cases}$

<u>Решение</u>. Будем работать с расширенной матрицей системы: приведем ее к ступенчатому виду и проверим выполнение теоремы Кронекера – Капелли:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & 2 & 5 \\ -4 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right) \approx \begin{vmatrix} II+3I \\ III+4I \end{vmatrix} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 10 & -7 & 17 \\ 0 & 10 & -7 & 17 \end{array}\right) \approx |III-II| \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 10 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Так как $rangA = rang\overline{A} = 2,$ но $2<3$ (3 – число неизвестных), то СЛАУ имеет множество решений. По полученной матрице системы восстанавливаем саму систему: $\begin{cases} x+2y-3z=4, \\ 10y-7z=17. \end{cases}$

Осуществляем обратный ход: $y = \frac{17}{10} + \frac{7}{10}z.$ Подставляем это значение в первое уравнение, найдем: $x = 4+3z-2y = 4+3z-2\left(\frac{17}{10}+\frac{7}{10}z\right) = \frac{3}{5}+\frac{8}{5}z.$

Итак, $x = \frac{3}{5}+\frac{8}{5}z, \quad y = \frac{17}{10}+\frac{7}{10}z, \quad z = z.$

В данном случае z выступает в роли свободного неизвестного. Придавая z произвольные числовые значения, можно получить множество решений системы. Например, при $z=9$ частное решение системы $x=15;\ y=8;\ z=9.$