Тема 7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Лекция 7.1. Производная функции. Правила и формулы дифференцирования

План

1. *Задачи, приводящие к понятию производной.*
2. *Понятие производной.*
3. *Основные правила и формулы дифференцирования.*

1. *Задачи, приводящие к понятию производной*

Многочисленные задачи: о скорости и ускорении неравномерного движения, о скорости химической реакции, о скорости роста популяции, о плотности неоднородного стержня, о силе переменного тока, о касательной к кривой приводят к вычислению пределов отношений определенного вида.

Задача о вычислении скорости движения материальной точки

Зависимость расстояния S от времени t выражается функцией $S = S(t), \quad t \in [t_1; t_2]$, которую называют законом движения точки. Поставим задачу о вычислении скорости движения точки в момент времени $t_0 \in [t_1; t_2]$. Для ее решения рассмотрим движение точки в течение промежутка времени от t_0 до времени $t_0 + \Delta t$, где $\Delta t \neq 0$ и $t_0 + \Delta t \in (t_1; t_2)$. Так как в момент времени t_0 и $t_0 + \Delta t$ точка находилась на расстоянии $S(t_0)$ и $S(t_0 + \Delta t)$ соответственно, то путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt, равен $S(t_0 + \Delta t) - S(t_0) = \Delta S$. Поделив ΔS на Δt, получаем среднюю скорость V_{cp} движения точки за промежуток времени Δt, то есть

$$V_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Полагая, что чем меньше промежуток времени Δt, тем средняя скорость более точно характеризует особенности движения точки в момент времени t_0, естественно считать, что скорость движения точки в момент времени t_0 (мгновенная или истинная скорость) есть предел, к которому стремится средняя скорость за промежуток времени $\Delta t \to 0$. Итак,

$$V=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Задача о плотности неоднородного стержня

Рассмотрим неоднородный стержень, длина которого равна l. Зависимость массы m части стержня от длины x этой части выражается функцией $m=m(x)$, $x\in(0;\ l)$. Поставим задачу об определении плотности стержня в точке $x_0\in[0;l]$. Один из его концов примем за начало отсчета 0 (рис. 7.1).

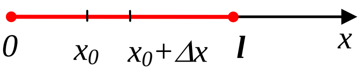


Рис. 7.1

Рассмотрим участок стержня, заключенный между x_0 и $x_0+\Delta x$, где $\Delta x\neq 0$ и $x_0+\Delta x\in[0;l]$. Масса этого участка равна $m(x_0+\Delta x)-m(x_0)=\Delta m$. Поделив Δm на Δx, получаем среднюю линейную плотность ρ_{cp} на участке Δx, то есть

$$\rho_{cp}=\frac{\Delta m}{\Delta x}.$$

Исходя из того, что, чем меньше Δx, тем ближе средняя линейная плотность к линейной плотности стержня в данной точке x_0, естественно считать, что линейная плотность есть предел, к которому стремится средняя плотность при $\Delta x\to 0$. Итак,

$$\rho=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}.$$

Задача о касательной к кривой

Рассмотрим график функции $y=f(x)$ и возьмем две близкие точки графика: точку $A(x_0;\,f(x_0))$ и $B(x_0+\Delta x;\,f(x_0+\Delta x))$. Прямая AB называется **секущей** (рис. 7.2). Угол наклона секущей AB и оси Ox обозначим α, $\alpha\in\left[0;180^\circ\right)$. Из треугольника ABC легко видеть, что

$$tg\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если Δx устремить к нулю, то точка B устремится по графику к точке A, в результате чего секущая занимает предельное положение и становится **касательной к кривой** $y=f(x)$ **в точке** A. Угол α наклона секущей переходит в угол φ наклона касательной, и, соответственно, $tg\alpha$ переходит в $tg\varphi$.

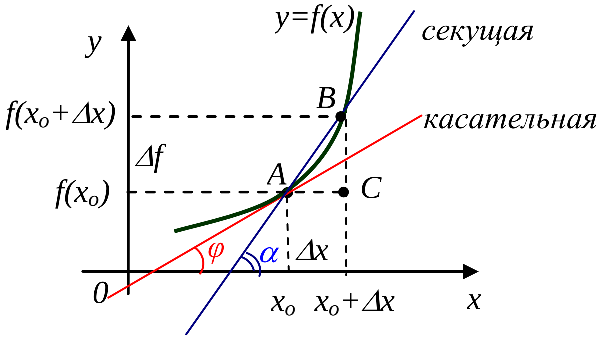


Рис. 7.2

Итак, имеем

$$tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где $tg\varphi = k -$ угловой коэффициент касательной.

Сопоставляя операции, которые проводились при решении трех задач, легко видеть, что во всех случаях делалось одно и то же (различия только в толковании переменных); а именно приращение функции делилось на приращение аргумента, а затем вычислялся предел этого отношения, при условии стремления приращения аргумента к нулю. Этот предел и называется производной, являясь основным понятием дифференциального исчисления.

2. *Понятие производной*

Производной функция $y = f(x)$ **в точке** x называется предел отношения **приращения функции** $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ в этой точке к приращению аргумента Δx, при стремлении Δx к нулю, то есть

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.} \qquad (7.1)$$

Обозначается производная различными символами: $y'(x)$; y'; y'_x; $\dfrac{dy}{dx}$.

Дифференцирование функции – это операция нахождения производной функции.

Функция называется **дифференцируемой в точке** x, если она имеет конечную производную в этой точке.

Функция называется **дифференцируемой на промежутке** X, если она имеет конечную производную во всех точках этого промежутка.

Производная функции выражает скорость изменения функции. Сравнивая определение производной и содержание задач, можно сформулировать механический, геометрический и экономический смысл производной (табл. 7.1).

Таблица 7.1

Механический (физический) смысл производной	Геометрический смысл производной	Экономический смысл производной
$\boxed{V = S' = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t}}$ Мгновенная скорость V движения материальной точки в момент времени t есть производная пути $S = S(t)$ по времени t	$\boxed{k = y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$ Угловой коэффициент k касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; y_0)$**,** есть производная $y'(x_0)$. **Уравнение касательной** к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0; y_0)$ имеет вид $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$	$\boxed{p = V' = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta V}{\Delta t}}$ Производительность труда p в момент времени t есть производная объема произведенной продукции $V = V(t)$ по времени t

Алгоритм отыскания производной функции $y = f(x)$ в точке x (согласно определению):

1) дать значению x произвольное приращение $\Delta x \neq 0$, тогда новое значение аргумента окажется равным $x + \Delta x$;

2) вычислить значения $f(x)$ и $f(x + \Delta x)$, отыскать приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

3) найти отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

4) найти $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Пример 7.1. Найти производную функции $y = x^2 + 8$ в точке $x = 2$.

Решение. 1. Дадим значению $x = 2$ приращение $\Delta x \neq 0$, тогда новое значение аргумента окажется равным $2 + \Delta x$.

2. Учитывая, что $f(2) = 2^2 + 8 = 12$, а $f(2 + \Delta x) = (2 + \Delta x)^2 + 8$, вычислим приращение функции

$$\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) = \left((2 + \Delta x)^2 + 8\right) - \left(2^2 + 8\right) = 4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 + 8 - 12 = 4\Delta x + (\Delta x)^2.$$

3. Составляя отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, получаем $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$.

3. Найдем предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4.$$

Итак, $f'(2)=4$.

Связь непрерывности и дифференцируемости функции

Теорема 7.1. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x, то она и непрерывна в этой точке.

Обратное утверждение в общем случае неверно, то есть если функция непрерывна в какой-то точке, то она не обязательно будет дифференцированной в этой точке. В качестве примера приведем функцию $y=|x|$, которая непрерывна в точке $x=0$, но не дифференцируема в этой точке, так как с геометрической точки зрения касательная однозначно не определена.

4. Основные правила и формулы дифференцирования

Таблица производных основных элементарных функций $y=f(x)$

Таблица 7.2

Степенные функции	Показательные и логарифмические функции	Тригонометрические функции	Обратные тригонометрические функции
$(x)'=1,$ (1) $(c)'=0$ (2)	$(a^x)'=a^x\ln a$ (6)	$(\sin x)'=\cos x$ (10)	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (14)
$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$ (3)	$(e^x)'=e^x$ (7)	$(\cos x)'=-\sin x$ (11)	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (15)
$(\dfrac{1}{x})'=-\dfrac{1}{x^2}$ (4)	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$ (8)	$(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ (12)	$(arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ (16)
$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (5)	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ (9)	$(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ (13)	$(arcctgx)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$ (17)

Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного дифференцируемых функций

Пусть $u=u(x), v=v(x)-$ функции аргумента x.

Теорема 7.2. Если в точке x существуют производные функций $u=u(x),\quad v=v(x)$, то в этой точке:

1) существует производная суммы $u+v$, при этом $\boxed{(u+v)'=u'+v';}$ (7.2)

2) существует производная разности $u - v,$ при этом $\boxed{(u-v)' = u' - v';}$ (7.3)

3) существует производная произведения $uv,$ при этом $\boxed{(uv)' = u'v + uv'.}$ (7.4)

В частности, если C = const, то $\boxed{(Cu)' = Cu';}$ (7.5)

4) при $v(x) \neq 0$ существует производная частного $\frac{u}{v},$ при этом

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.} \quad (7.6)$$

Кратко правила дифференцирования можно сформулировать так.

Правило 1. Производная суммы двух дифференцируемых функций равна сумме производных этих функций.

Правило 2. Производная разности двух дифференцируемых функций равна разности производных этих функций.

Замечание. Правила 1 и 2 распространяются на случай суммы и разности любого конечного числа функций.

Правило 3. Производная произведения двух дифференцируемых функций равна сумме произведений производной первого сомножителя на второй сомножитель и первого сомножителя на производную второго сомножителя.

Правило 4. Постоянный множитель можно выносить за знак производной.

Правило 5. Производная дроби двух дифференцируемых функций равна произведению производной числителя на знаменатель минус произведение числителя на производную знаменателя и полученную разность разделить на квадрат знаменателя.

Пример 7.2. Найти производную функции $y = \ln x + \cos x.$

Решение. Используя (7.7) и табличные формулы (9) и (11), получаем

$$y' = (\ln x + \cos x)' = (\ln x)' + (\cos x)' = \frac{1}{x} - \sin x.$$

Пример 7.3. Найти производную функции $y = x^7 \cdot 7^x.$

Решение. Используя (7.9) и табличные формулы (3) и (6), получаем

$$y' = \left(x^7 \cdot 7^x\right)' = \left(x^7\right)\cdot 7^x + x^7 \cdot \left(7^x\right)' = 7x^6 \cdot 7^x + x^7 \cdot 7^x \ln 7 = x^6 \cdot 7^x (7 + x\ln 7).$$

Пример 7.4. Найти производную функции $y = \dfrac{x^3 + 5x^2 + 3}{x - 5}.$

Решение. Используя правило (7.11), получаем

$$y' = \frac{\left(x^3 + 5x^2 + 3\right)'(x-5) - \left(x^3 + 5x^2 + 3\right)(x-5)'}{(x-5)^2}.$$

Применяя (7.7), (7.8), (7.10) и табличные формулы (3), (1), (2), получаем

$$y' = \frac{\left(3x^2+10x\right)\left(x-5\right)-\left(x^3+5x^2+3\right)\cdot 1}{\left(x-5\right)^2} = \frac{2x^3-10x^2-50x-3}{\left(x-5\right)^2}.$$

Правило дифференцирования обратной функции

Теорема 7.3. Если функция $y = f(x)$ определена, непрерывна, строго монотонна в окрестности точки x и в этой точке имеет производную $f'(x) \neq 0$, то обратная к ней функция $x = g(y)$ имеет производную в точке y, при этом

$$\boxed{g'(y) = \frac{1}{f'(x)}} \quad \text{или} \quad \boxed{x'_y = \frac{1}{y'_x}.} \tag{7.7}$$

Правило 6. Производная обратной функции равна обратной величине производной прямой функции.

Покажем правило дифференцирования обратной функции на примере функции $y = \arcsin x$ на интервале *(–1; 1)*. Она является обратной для функции $x = \sin y$, где $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ имеем $x'_y = \cos y \neq 0$. Согласно правилу дифференцирования обратной функции $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Правило дифференцирования сложной функции

Теорема 7.4. Если функция $u = u(x)$ имеет производную в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную в точке u, то сложная функция $y = f(u(x))$ имеет производную в точке x, причем

$$\boxed{y'(x) = f'(u)\cdot u'(x)} \quad \text{или} \quad \boxed{y'_x = f'_u \cdot u'_x.} \tag{7.8}$$

Правило 7. Если $y = f(u)$, а $u = u(x)$, то производная сложной функции $y = f(u(x))$ по независимой переменной x равна произведению производной функции y по промежуточному аргументу u на производную промежуточного аргумента u по независимой переменной x.

Дифференцирование сложной функции – это как снятие листов с кочана капусты: сначала находим производную «внешней» функции и умножаем ее на производную «внутренней» функции.

Таблица производных сложных функций $f\left(u(x)\right)$

Таблица 7.3

Степенные функции	Показательные и логарифмические функции	Тригонометрическ ие функции	Обратные тригонометрические функции

$(x)'=1,$ $(c)'=0$	$(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$	$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$	$(\arcsin u)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$	$(e^u)'=e^u\cdot u'$	$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$	$(\arccos u)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$(\dfrac{1}{u})'=-\dfrac{1}{u^2}\cdot u'$	$(\log_a u)'=\dfrac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$	$(tgu)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$	$(arctgu)'=\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
$(\sqrt{u})'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$	$(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$	$(ctgu)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$	$(arcctgu)'=-\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$

<u>*Пример 7.5.*</u> Найти производную функций: а) $y=e^{x^3}$; б) $y=\ln\cos x$.

<u>*Решение*</u>. а) функцию e^{x^3} можно представить как $f(u(x))$, где $f(u)=e^u$ и $u=x^3$. По таблице производных $f'(u)=e^u$, $u'(x)=3x^2$. Следовательно, по правилу дифференцирования сложной функции имеем: $f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)=e^u\cdot 3x^2=\left|u=x^3\right|=e^{x^3}\cdot 3x^2.$

б) для сокращения письма больше не будем явно вводить вспомогательную функцию $u(x)$, понимая при этом, какое выражение играет ее роль.

$$(\ln\cos x)'=\ln'(\cos x)\cdot(\cos x)'=\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)=-\frac{\sin x}{\cos x}=-tgx.$$

<u>*Пример 7.6.*</u> Найти производную функций: а) $y=\sin\sqrt{x}$; б) $y=\sqrt{\sin x}$.

<u>*Решение*</u>. а) $\left(\sin\sqrt{x}\right)'=\cos\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'=\cos\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

б) $\left(\sqrt{\sin x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot(\sin x)'=\dfrac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot\cos x.$

Замечание. Для отыскания производных некоторых функций можно воспользоваться методом логарифмического дифференцирования. Суть его состоит в том, что заданную функцию прежде всего логарифмируют, после чего приравнивают результаты дифференцирования обеих частей полученного равенства и выражают искомую функцию.

<u>*Пример 7.6.*</u> Найти производную функции $y=\left(x^2+4\right)^{\sin x}$.

<u>*Решение*</u>. Логарифмируя данную функцию, получаем

$\ln y=\sin x\cdot\ln\left(x^2+4\right).$

Дифференцируем обе части полученного равенства по x:

$$(\ln y)'=\left(\sin x\cdot\ln\left(x^2+4\right)\right)';\quad \frac{1}{y}\cdot y'=\cos x\cdot\ln\left(x^2+4\right)+\frac{2x\cdot\sin x}{x^2+4}.$$

Следовательно,

$$y'=y\cdot(\cos x\cdot\ln\left(x^2+4\right)+\frac{2x\cdot\sin x}{x^2+4})=\left(x^2+4\right)^{\sin x}\cdot\left(\cos x\cdot\ln\left(x^2+4\right)+\frac{2x\sin x}{x^2+4}\right).$$

Лекция 7.2. Понятие дифференциала функции и его применение в приближенных вычислениях

План

1. Понятие дифференциала функции, его свойства и геометрический смысл.
2. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.
3. Производные и дифференциалы высших порядков.

Одним из самых важных понятий дифференциального исчисления, наряду с производной, является дифференциал функции. Эти два понятия разные, хотя и тесно связаны друг с другом.

1. Понятие дифференциала функции, его свойства и геометрический смысл

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a; b]$. По определению производной функции $y = f(x)$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

По теореме о применении бесконечно малых при вычислении пределов

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Домножив обе части равенства на Δx, получим

$$\Delta y = y'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Таким образом, приращение функции Δy представлено в виде суммы двух бесконечно малых слагаемых. Очевидно, что второе слагаемое является бесконечно малой более высокого порядка и при $\Delta x \to 0$ оказывается несущественным и достаточно малым по сравнению с первым. Следовательно, основное влияние на приращение функции оказывает первое слагаемое. Его и называют дифференциалом функции и обозначают dy.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная, линейная относительно Δx часть приращения функции в этой точке:

$$dy = y'(x)\Delta x. \tag{7.9}$$

Если функция $y = x$, то для нее $dy = x'\Delta x = 1 \cdot dx = dx$.

Таким образом, $dy = dx$, что позволяет переписать формулу дифференциала

$$\boxed{dy = y'dx.} \qquad (7.10)$$

Итак, дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал аргумента. Такая форма записи является общепринятой.

<u>*Пример 7.7.*</u> Дана функция $y = x^3 - x + 10$. Найти dy в точке $x_0 = 1$ при $\Delta x = 0{,}02$.

<u>*Решение*</u>. Поскольку $y' = 3x^2 - 1$, то $y'(1) = 3 \cdot 1^2 - 1 = 2$. Пользуясь равенством $dy = y'(x)\Delta x$, получим $dy = 2 \cdot 0{,}02 = 0{,}04$.

<u>*Пример 7.8.*</u> Найти дифференциал функции $y = \sin\sqrt{x^2 + 1}$.

<u>*Решение*</u>. В этом примере не указана определенная точка x_0 и не дано конкретное приращение Δx. Поэтому, учитывая, что $y' = \dfrac{x\cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$, получим:

$$dy = \frac{x\cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\Delta x, \text{ или } dy = \frac{x\cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

Дифференциал, как и производную, можно определить графически.

Геометрический смысл дифференциала

Пусть функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет производную $f'(x_0)$. Проведем к графику этой функции в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ касательную L (рис. 7.3). Дадим значению x_0 приращение Δx. Точка M_1 на графике функции соответствует значению аргумента $x_0 + \Delta x$.

Обозначим через φ угол наклона касательной L к положительному направлению оси Ox. Из прямоугольного треугольника M_0AB имеем

$$tg\varphi = \frac{AB}{M_0B} = \frac{AB}{\Delta x},$$

то есть $AB = tg\varphi \cdot \Delta x$.

Как следует из геометрического смысла производной, $tg\varphi = f'(x_0)$, поэтому можем записать $AB = f'(x_0) \cdot \Delta x = dy$. Получаем, что **дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен приращению ординаты касательной**

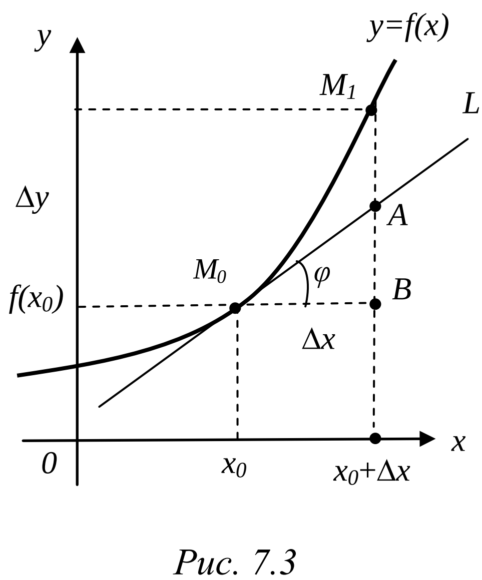


Рис. 7.3

L, **проведенной к графику этой функции в точке** $M_0(x_0; f(x_0))$, **при изменении аргумента от значения** x_0 **к значению** $x_0 + \Delta x$.

Свойства дифференциала

1. Дифференциал функции является линейной функцией от Δx.
2. Дифференциал функции dy отличается от приращения Δy на величину, которая при условии, что $\Delta x \to 0$, представляет собой бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx, то есть $\Delta y = dy + \alpha(\Delta x)\Delta x$.
3. Дифференциал dy всегда можно записывать в форме $dy = y'(x)dx$, независимо от того, является x независимой переменной или же x – функция другой переменной (*инвариантность формы дифференциала*).

Правила для вычисления дифференциала

$$d(u \pm v) = du \pm dv;$$

$$d(uv) = udv + vdu;$$

$$d(cv) = cdu \quad (c = const);$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{udv - vdu}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

2. *Применение дифференциала в приближенных вычислениях*

Как известно, дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x есть главная часть приращения функции Δy в этой точке, то получаем приближенное равенство

$$\Delta y \approx dy \tag{7.11}$$

Подставляя в равенство (7.11) выражения для $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$ и $dy = y'\Delta x$, получим формулу для вычисления приближенных значений функций:

$$y(x + \Delta x) - y(x) \approx y'(x)\Delta x \quad \text{или} \quad \boxed{y(x + \Delta x) \approx y(x) + y'(x)\Delta x.} \tag{7.12}$$

<u>*Пример 7.9.*</u> Вычислить приближенно $arctg1,05$.

<u>*Решение*</u>: Рассмотрим функцию $y = arctgx$. По формуле (7.12) имеем

$$arctg(x + \Delta x) \approx arctgx + (arctgx)' \cdot \Delta x,$$

или $$arctg(x + \Delta x) \approx arctgx + \frac{\Delta x}{1 + x^2},$$

Так как $x + \Delta x = 1,05$, то при $x = 1$ и $\Delta x = 0,05$ получаем

$$arctg1{,}05 \approx arctg1 + \frac{0{,}05}{1+1} = \frac{\pi}{4} + 0{,}025 \approx 0{,}81.$$

3. Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого множества *X*. Тогда производная $f'(x)$ представляет собой функцию аргумента *x*. Эта функция также может иметь производную.

Производной второго порядка от функции $y = f(x)$ называется производная от $f'(x)$ (если она существует) и обозначается одним из символов: y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Таким образом, $\boxed{y'' = (y')'.}$ (7.13)

<u>Пример 7.10</u>. Дана функция $y = x^6 + \ln x$. Найти $y^{(4)}$.

<u>Решение</u>.

$$y' = 6x^5 + \frac{1}{x}, \quad y'' = 30x^4 - \frac{1}{x^2}, \quad y''' = 120x^3 + \frac{2}{x^3}, \quad y^{(4)} = 360x^2 - \frac{6}{x^4}.$$

Дифференциал функции является функцией от аргумента *x*, поэтому можно рассмотреть дифференциал от дифференциала *dy*.

Дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала данной функции и обозначается символом d^2y. Итак, $d^2y = d(dy)$. Аналогично определяется дифференциал третьего порядка как $d^3y = d(d^2y)$. Дифференциалом *n*-го порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка этой функции и обозначается символом $d^n y$. Итак, $d^n y = d(d^{n-1}y)$, $n > 1$. Подчеркнем, что, определяя дифференциалы высших порядков, дифференциал независимой переменной все время рассматриваем как постоянную величину. Учитывая это, имеем:

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = (y'dx)'dx = y''dxdx = y''(dx)^2 = y''dx^2;$$

$$d^3y = d(d^2y) = d(y''dx^2) = (y''dx^2)'dx = y'''dx^2dx = y'''dx^3; \ldots; \ d^n y = y^{(n)}dx^n.$$

<u>Пример 7.11.</u> Дана функция $y = x^5 - 5x^3 + 4$. Найти d^4y.

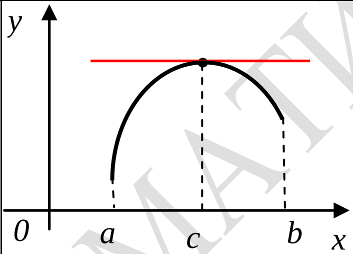
<u>Решение.</u> Дифференциал 4-го порядка вычисляется $d^4y = y^{(4)}dx^4$.

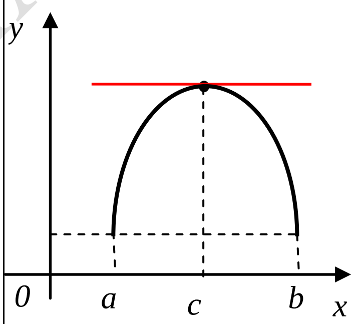
Так как $y' = 5x^4 - 15x^2$, $y'' = 20x^3 - 30x$, $y''' = 60x^2 - 30$, $y^{(4)} = 120x$, то получаем $d^4y = 120dx^4$.

Лекция 7.3. Приложение понятия производной

План
1. *Основные теоремы о дифференцируемых функциях.*
2. *Применение производных для вычисления пределов функций (правило Лопиталя).*
3. *Возрастание и убывание функций. Экстремумы функции.*

1. *Основные теоремы о дифференцируемых функциях*

Теорема Ферма[1] (*теорема о нулях производной*)	Геометрическая интерпретация теоремы Ферма
Если функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a;b)$ и принимает в некоторой точке c этого интервала наибольшее (или наименьшее) значение и существует производная $f'(c)$, тогда $f'(c) = 0$	 Касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(c;\ f(c))$, параллельна оси Ox, если функция в этой точке принимает наибольшее (или наименьшее) значение

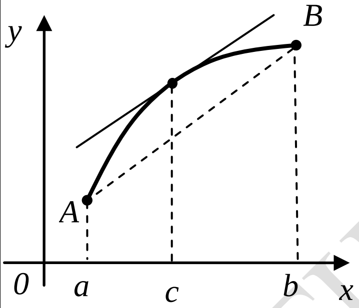
Теорема Ролля[2] (*о корнях производной*)	Геометрическая интерпретация теоремы Ролля
Пусть функция $y = f(x)$ 1) непрерывна на $[a;b]$; 2) дифференцируема на $(a;b)$; 3) $f(a) = f(b)$. Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a;b)$, такая что $f'(c) = 0$	 Существует такая $c \in (a;b)$, что касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(c;\ f(c))$, параллельна оси Ox, если непрерывная и дифференцируемая функция принимает равные значения на концах отрезка $[a;b]$

---

[1] Пьер Ферма (1601–1665) – французский математик, юрист, полиглот. Известен благодаря великой теореме Ферма, которая была сформулирована им в 1637 г., на полях книги «Арифметика» Диофанта с припиской, что найденное им остроумное доказательство этой теоремы слишком длинно, чтобы привести его на полях.

[2] Мишель Ролль (1652–1719) – французский математик.

Теорема Коши (об отношении приращений двух функций)
Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$: 1) непрерывны на $[a;b]$; 2) дифференцируемы на $(a;b)$, причем $g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a;b)$. Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a;b)$, такая, что $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Теорема Лагранжа[3] *(о конечных приращениях)*	Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа	
Пусть функция $y = f(x)$ 1) непрерывна на $[a;b]$; 2) дифференцируема на $(a;b)$. Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a;b)$, такая что $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$		Существует такая точка $c \in (a;b)$, что касательная, поведенная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(c;\ f(c))$, параллельна хорде AB

2. *Применение производных для вычисления пределов функций (правило Лопиталя)*

Правило Лопиталя применяется при вычислении пределов и дает простой и эффективный способ раскрытия неопределенностей вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ и $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ при помощи производных.

Теорема 7.5. (*правило Лопиталя*[4]). Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \quad \text{либо} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty,$$

то справедливо равенство

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},} \qquad (7.14)$$

при условии, что предел в правой части этого равенства существует.

---

[3] Жозе́ф Луи́ Лагра́нж (1736–1813) – французский математик, астроном и механик. Завершил математизацию механики.
[4] Гийом Франсуа Лопиталь (1661–1704) – французский математик, автор первого учебника по математическому анализу.

Пример 7.12. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{e^x-e^4}{x-4}$.

Решение. Имеем неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to 4}\frac{e^x-e^4}{x-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{\left(e^x-e^4\right)'}{(x-4)'}=\lim_{x\to 4}\frac{e^x}{1}=e^4.$$

Пример 7.13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+4x+1}{e^{5x}}$.

Решение. По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x+1}{e^{5x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+4x+1\right)'}{\left(e^{5x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+4}{5e^{5x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{25e^{5x}}=0.$$

В примере правило Лопиталя применено два раза.

Пример 7.14. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-ctgx\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot e^{-x}$.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-ctgx\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{0}{1}=0;$$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot e^{-x}=[\infty\cdot 0]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{e^x}\right)=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=\left[\dfrac{1}{\infty}\right]=0.$

3. *Возрастание и убывание функций. Экстремумы функции*

Одно из самых важных применений производных состоит в том, что с их помощью можно проводить исследования функций, находить промежутки возрастания и убывания, экстремальные значения функции, а также наибольшее и наименьшее значения непрерывных функций на отрезке.

Условия возрастания и убывания функций

Теорема 7.6. (*признак возрастания (убывания) функции*).

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и ее производная в этом интервале положительна $f'(x)>0$, то функция $y=f(x)$ возрастает на $(a;b)$.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и ее производная в этом интервале отрицательна $f'(x) < 0$, то функция $y = f(x)$ убывает на $(a; b)$.

Итак, для дифференцируемой функции $f(x)$ признак возрастания и убывания кратко может быть записан следующим образом:

$\boxed{f'(x) > 0 \quad \Rightarrow f(x) - \text{возрастает,}}$ $\boxed{f'(x) > 0 \quad \Rightarrow f(x) - \text{убывает.}}$

Геометрически теорема 7.6 означает, что касательная к графику возрастающей функции в любой точке графика наклонена к оси Ox под острым углом α $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$, а касательная к графику убывающей функции наклонена к оси Ox под тупым углом α $\left(\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$ (рис. 7.4).

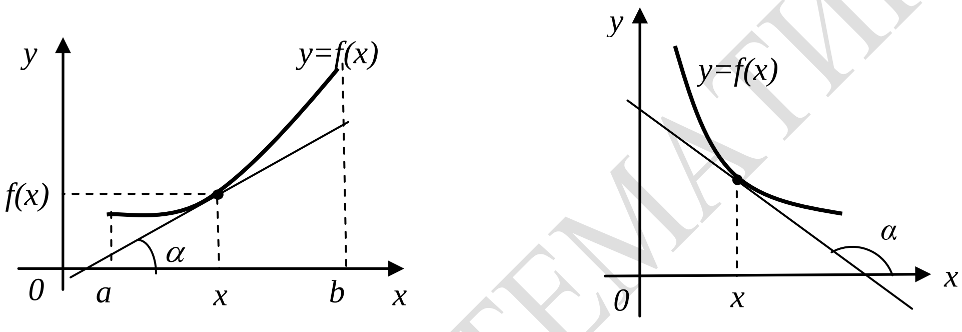


Рис. 7.4

Экстремумы функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(a; b)$ и x_0 – внутренняя точка этого промежутка.

Точка x_0 называется **точкой максимума** функции $y = f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)$.

Значение $f(x_0)$ называется **максимумом функции** $y = f(x)$ в точке x_0.

Точка x_0 называется **точкой минимума** функции $y = f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполняется неравенство $f(x_0) < f(x)$.

Значение $f(x_0)$ называется **минимумом функции** $y = f(x)$ в точке x_0.

Максимумы и минимумы функции называют **экстремумами** функции.

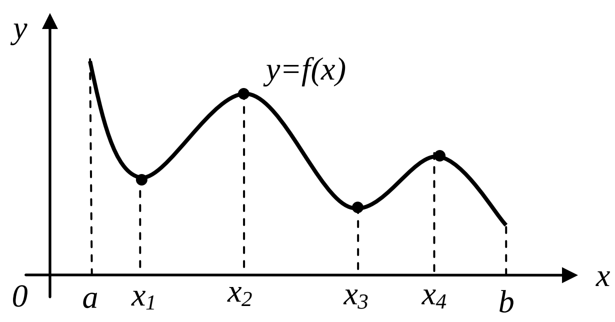


Рис. 7.5

Для графика функции $y = f(x)$ (рис. 7.5) x_1, x_3 – точки минимума, x_2, x_4 – точки максимума, значения $f(x_1)$, $f(x_3)$ – минимум функции, $f(x_2)$, $f(x_4)$ – максимум функции.

Замечание. Граничные значения области определения не могут относиться к точкам максимума и минимума, так как они не принадлежат области определения вместе с некоторой своей окрестностью слева или справа.

Теорема 7.7. (*необходимое условие экстремума*). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует.

Критическими точками (подозрительными на экстремум) непрерывной функции $y = f(x)$ называются внутренние точки области определения, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует.

Теорема 7.8 (*первое достаточное условие экстремума*). Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума; с минуса на плюс, то x_0 есть точка минимума.

Алгоритм отыскания интервалов монотонности функции и экстремумов с помощью первой производной

1. Найти область определения $D(f)$ функции $y = f(x)$.
2. Найти производную функции $f'(x)$.
3. Найти критические точки, где $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует.
4. Нанести на ось Ox область $D(f)$ и полученные точки, указать дугами интервалы монотонности.
5. Исследовать знак $f'(x)$ на каждом интервале.
6. Сделать вывод о промежутках возрастания и убывания функции, о максимумах и минимумах функции.

Пример 7.15. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = 3x^5 - 5x^3$.

Решение. Проводим исследование по рассмотренному выше алгоритму.

1. Область определения $(-\infty; \infty)$.

2. Вычисляем производную $y'(x) = 15x^4 - 15x^2$.

3. Найдем критические точки: $y'(x)=0 \Rightarrow 15x^4-15x^2=0$, то есть $15x^2\left(x^2-1\right)=0$, $\quad x_1=0;\ x_2=-1;\ x_3=1$.

4. Точки $-1;\quad 0;\ 1$ разбивают числовую прямую на интервалы.

5. На числовой прямой в каждом интервале отмечаем знаки производной $y'(x)$ и соответствующие промежутки монотонности функции (рис. 7.6):

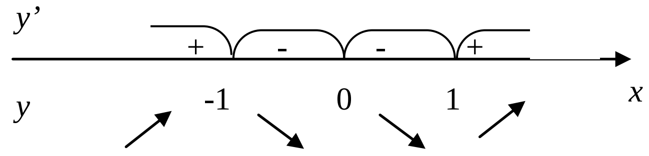


Рис. 7.6

На основании теорем 7.6 и 7.7 приходим к выводу, что функция $y=f(x)$ возрастает при $x\in(-\infty;1)$ и $(1;+\infty)$; убывает при $x\in(-1;1)$. А на основании теоремы 7.9 делаем вывод, что $x_1=-1-$ точка максимума, $x_1=1-$ точка минимума. Функция имеет максимум $y(-1)=2$ и минимум $y(1)=-2$.

В ряде случаев бывает более удобным другой достаточный признак экстремума.

Теорема 7.9. (*второе достаточное условие экстремума*). Если в точке x_0 первая производная функции $y=f(x)$ равна нулю ($f'(x_0)=0$), а вторая производная в точке x_0 существует и отлична от нуля ($f''(x_0)\neq 0$), то при $f''(x_0)<0$ в точке x_0 функция имеет максимум; при $f''(x_0)>0$ в точке x_0 функция имеет минимум.

<u>Пример 7.16</u>. Найти экстремумы функции $y=x^4-4x^3+4x^2$.

<u>Решение</u>. 1. Область определения $(-\infty;\infty)$.

2. $y'(x)=4x^3-12x^2+8x$.

3. $y'(x)=0 \Rightarrow 4x^3-12x^2+8x=0 \quad \Rightarrow 4x\left(x^2-3x+2\right)=0$,

т.е. $x_1=0;\ x_2=1;\ x_3=2-$ критические точки.

4. $y''(x)=12x^2-24x+8$. Определим знак $y''(x)$ в каждой критической точке:

$y''(0)=8>0$, значит $x=0-$ точка минимума функции, причем $y(0)=0$;

$y''(1)=-4<0$, значит $x=1-$ точка максимума функции, причем $y(1)=1$;

$y''(2)=8>0$, значит $x=2-$ точка минимума функции, причем $y(2)=0$.

Лекция 7.4. Общее исследование функций с помощью производной

П л а н

1. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.
2. Асимптоты графика функции.
3. Общая схема исследования функции.

1. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

В точках перегиба происходит изменение формы графика функции.

График функции $y = f(x)$ называется **выпуклым** (выпуклым вверх) на интервале $(a;b)$, если он расположен *ниже* любой своей касательной на этом интервале (рис. 7.7*а*).

График функции $y = f(x)$ называется **вогнутым** (выпуклым вниз) на интервале $(a;b)$, если он расположен *выше* любой своей касательной на этом интервале (рис. 7.7*б*).

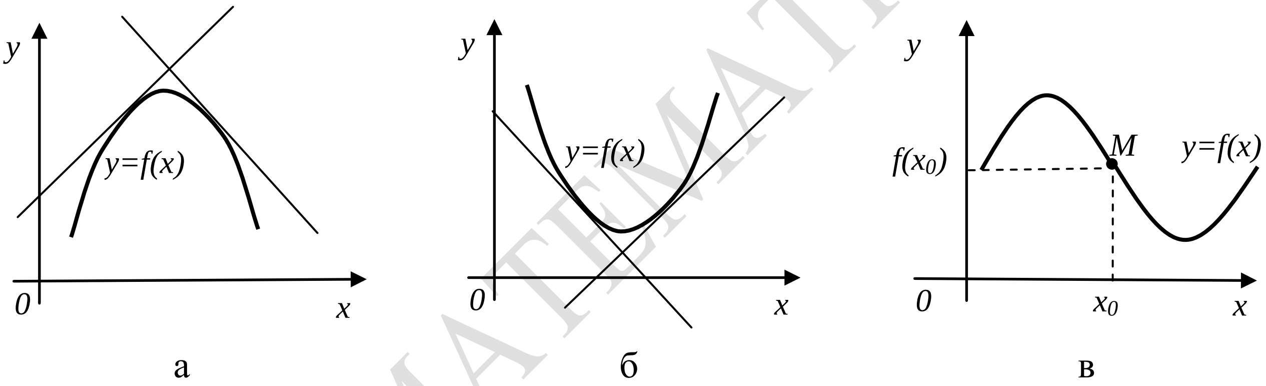


Рис. 7.7

Точкой перегиба называется точка графика функции, где меняется направление выпуклости. На рис. 7.7*в* изображен график функции $y = f(x)$ с точкой перегиба $M(x_0; f(x_0))$.

Интервалы выпуклости находят с помощью следующей теоремы.

Теорема 7.10. (*условие выпуклости (вогнутости) графика функции*).

Если во всех точках интервала $(a;b)$ функция $y = f(x)$ имеет $f''(x) > 0$, то график функции на этом интервале вогнутый; если $f''(x) < 0$, то график функции на этом интервале выпуклый.

Итак, для дифференцируемой функции $f(x)$ условие выпуклости (вогнутости) графика функции кратко может быть записано следующим образом:

$\boxed{f''(x) > 0 \Rightarrow \text{ график } f(x) \text{– вогнут,}}$ $\boxed{f''(x) < 0 \Rightarrow \text{график } f(x) \text{– выпукл.}}$

Теорема 7.11 (*достаточное условие существования точек перегиба*). Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика $M\left(x_0; f(x_0)\right)$ есть точка перегиба.

Алгоритм определения интервалов выпуклости (вогнутости) графика функции и нахождения точек перегиба

1. Найти область определения $D(f)$ функции $y = f(x)$.
2. Найти вторую производную функции $f''(x)$.
3. Найти точки, где $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует.
4. Определить знак $f''(x)$ слева и справа от каждой из этих точек.
5. Сделать вывод о направлении выпуклости и о наличии точек перегиба.

Пример 7.17. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y = x^4 - 6x^2 - 6x + 1$.

Решение. Проводим исследование по рассмотренному выше алгоритму.

1. Область определения $(-\infty; \infty)$.

2. Вычисляем вторую производную $y'(x) = 4x^3 - 12x - 6, \quad y'' = 12x^2 - 12$.

3. $y'' = 0$ при $y'(x) = 4x^3 - 12x - 6, \quad y'' = 12x^2 - 12$, то есть $12(x^2 - 1) = 0, \quad x_1 = -1; x_2 = 1$.

4. Точки -1; 1 разбивают числовую прямую на интервалы. Определим знак y'' на каждом интервале $(-\infty; -1), (-1; 1), (1; +\infty)$ и соответствующие промежутки выпуклости и вогнутости функции (рис. 7.8).

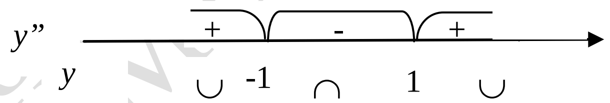


Рис. 7.8

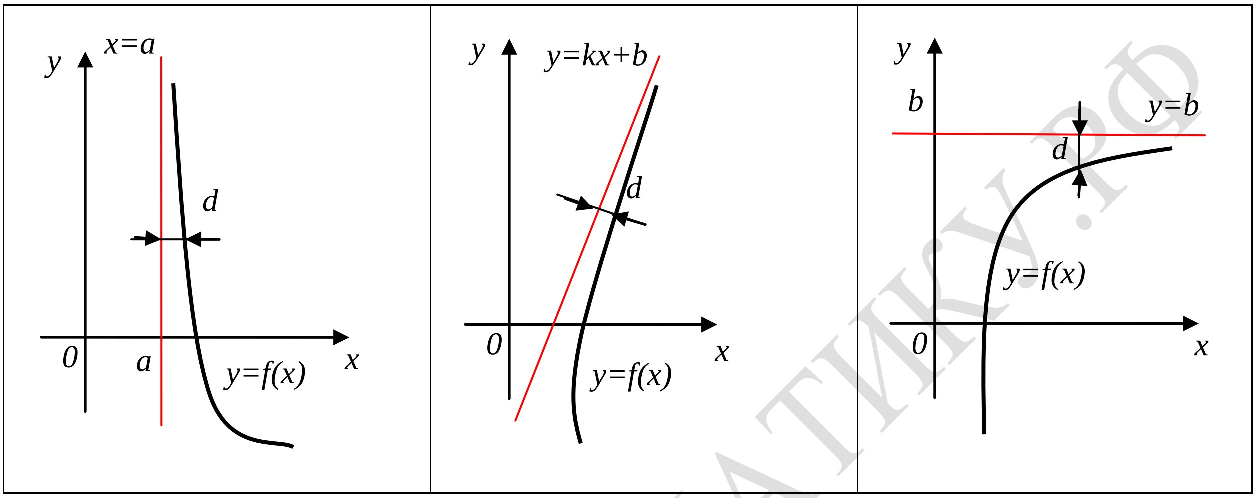
5. На основании теоремы 7.10 приходим к выводу, что график функции $y = f(x)$ на промежутках $(-\infty; -1), (1; +\infty)$ вогнутый; на промежутке $(-1; 1)$ – выпуклый. А на основании теоремы 7.11 делаем вывод, что $(-1; 2)$ и $(1; -10)$ – точки перегиба графика функции.

2. Асимптоты графика функции

При исследовании поведения функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$ удобным оказывается рассмотрение асимптот графика функции.

Прямая называется **асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точек графика до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении этих точек по графику функции в бесконечность.

Различают три вида асимптот: вертикальные, наклонные и горизонтальные. На рис. 7.9*а* изображена вертикальная асимптота, *б* – наклонная,
в – горизонтальная.



а б в

Рис. 7.9

1. **Вертикальная асимптота**.

Прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

<u>Пример 7.18</u>. Найти вертикальную асимптоту графика функции $y = \dfrac{1}{x+2}$.

<u>Решение.</u> $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$, то есть функция $y = \dfrac{1}{x+2}$ не определена при $x = -2$ и $\lim\limits_{x\to -2-0} \dfrac{1}{x+2} = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to -2+0} \dfrac{1}{x+2} = +\infty$. Значит, прямая $x = -2$ является вертикальной асимптотой графика данной функции.

Правило. Вертикальные асимптоты следует искать в точках бесконечного разрыва функции $y = f(x)$, то есть если в точке $x = a$ функция $y = f(x)$ терпит бесконечный разрыв, то прямая $x = a$ – вертикальная асимптота графика.

2. **Наклонная асимптота**.

Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если функцию можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) -$ бесконечно малое при $x \to \infty$.

Теорема 7.13. Для того чтобы график функции $y = f(x)$ имел при $x \to \infty$ наклонную асимптоту $y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k} \quad \text{и} \quad \boxed{\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - kx\right) = b.} \qquad (7.16)$$

Замечание. При исследовании графика функции относительно наклонных асимптот, отдельно рассматриваются случаи при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

<u>*Пример 7.19*</u>. Найти наклонные асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2 + 3x + 5}{x+1}$.

<u>*Решение*</u>. Найдем k и b по формулам (7.16):

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^2+3x+5}{x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x+5}{x^2+x} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+3x+5}{x+1} - x \right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+5}{x+1} \right) = 2.$$

Аналогично при $x \to -\infty$ можно убедиться, что значение параметров k и b принимают те же значения. Значит, при $x \to \pm\infty$ график имеет единственную асимптоту $y = x + 2$.

3. Горизонтальные асимптоты.

Прямая $y = b$ называется **горизонтальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$. Прямая $y = b$ называется **горизонтальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, если $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

<u>*Пример 7.20*</u>. Найти горизонтальные асимптоты графика функции $y = arctgx$.

<u>*Решение*</u>. Имеем $\lim\limits_{x\to+\infty} arctgx = \dfrac{\pi}{2}$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} arctgx = -\dfrac{\pi}{2}$. Значит, прямые $y = -\dfrac{\pi}{2}$ и $y = \dfrac{\pi}{2} -$ горизонтальные асимптоты.

3. Общая схема исследования функции

Чтобы построить график функции $y = f(x)$, целесообразно проводить исследование по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность или нечетность, периодичность. При построении графика учесть, что если функция четная, то ее график симметричен относительно оси *Oy*; если функция нечетная, то ее график симметричен относительно начала координат.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
4. Найти асимптоты графика функции: а) вертикальные, б) наклонные, в) горизонтальные.
5. Найти интервалы монотонности и точки экстремума.
6. Найти интервалы выпуклости вверх и вниз и точки перегиба графика функции.
7. Построить график функции, используя полученные результаты исследования.

В случае необходимости следует найти дополнительные точки.