Тема 8

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Лекция 8.1. Функции нескольких переменных. Частные производные

План

1. Понятие функции двух и нескольких переменных.
2. Предел и непрерывность функции двух переменных.
3. Понятие частных производных и дифференциала функции двух переменных.

Функции одной независимой переменной не охватывают все зависимости, существующие в природе. Поэтому естественно расширить известное понятие функциональной зависимости и ввести понятие функции нескольких переменных.

1. Понятие функции двух и нескольких переменных

Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел $(x;\, y)$.

Функцией двух переменных называется зависимость f, при которой каждой паре чисел $(x;\, y) \in D$ ставится в соответствие единственное значение переменной $z \in R$. Записывается в виде $z = f(x; y)$. При этом x и y называются **независимыми переменными** (аргументами), а $z-$ **зависимой переменной** (функцией); символ f означает **закон соответствия**.

Например, формула, выражающая объем цилиндра $V = \pi r^2 h$, является функцией двух переменных $V = f(r; h)$, где $r-$ радиус основания, $h-$ высота.

Областью определения D функции $z = f(x; y)$ называется множество пар $(x;\, y)$, при которых функция $z = f(x; y)$ определена.

Область определения изображается в виде некоторой области на плоскости xOy. Линия, ограничивающая данную область, называется **границей области**. Точки области, не лежащие на границе, называются **внутренними точками области**. Область, состоящая из одних внутренних точек, называется **открытой**. Область с присоединенной к ней границей называется **замкнутой** и обозначается $\overline{D}$.

Пример 8.1. Найти область определения следующих функций:

а) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; б) $z = x^2 + y^2$.

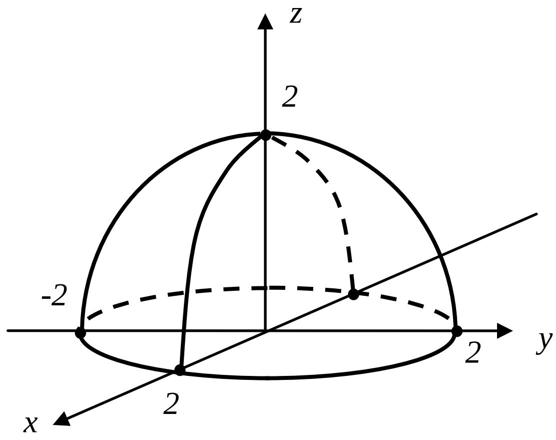

Рис. 8.1

Решение. а) Величина, стоящая под знаком квадратного коня должна быть неотрицательной, то есть $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 4$. Значит, область определения $D(z)$ – замкнутый круг с центром в точке $O(0;\, 0)$ и радиусом $R = 2$. График функции изображен на рис. 8.1 и представляет собой поверхность в пространстве – верхнюю полусферу с центром в начале координат и радиусом 2.

б) $(x;\, y) \in R$, то есть область определения $D(z)$ – вся координатная плоскость.

Функция двух переменных допускает геометрическое изображение.

Графиком функции двух переменных $z = f(x; y)$ называется множество точек трехмерного пространства $Oxyz$, аппликата z которых связана с абсциссой x и ординатой y функциональной зависимостью $z = f(x; y)$. Совокупность всех таких точек представляет некоторую поверхность в трехмерном пространстве.

Функция двух переменных – это частный случай функции нескольких переменных. Пусть имеется n переменных величин и каждому упорядоченному набору $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из некоторого множества X соответствует одно определенное значение переменной y, то говорят, что задана **функция нескольких переменных** $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Переменные $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называются **независимыми переменными** (аргументами), а y – **зависимой переменной** (функцией).

2. Предел и непрерывность функции двух переменных

Для функции двух (и большего числа) переменных вводится понятие предела функции и непрерывности, аналогично случаю функции одной переменной. Введем понятие окрестности точки. Пусть на плоскости даны две точки $M(x; y)$ и $M_0(x_0; y_0)$.

δ-окрестностью точки $M_0(x_0; y_0)$ называется множество всех точек $M(x; y)$ плоскости, расстояние от которых до точки M_0 меньше δ, то есть $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$. Другими словами, δ-окрестность точки M_0 – это все точки, лежащие внутри круга с центром M_0 и радиусом δ. Обозначают δ-окрестность точки M_0 символом $U_\delta(M_0)$.

Число A называется **пределом функции** $z = f(x;y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ (или, что то же самое, при $M(x;y) \to M_0(x_0;y_0)$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $(x;y)$ из δ-окрестности точки $(x_0;y_0)$, причем $(x \neq x_0;\, y \neq y_0)$ выполняется неравенство $|f(x;y) - A| < \varepsilon$.

Предел функции обозначается: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = A.$

На языке $\varepsilon - \delta$ определение предела функции может быть записано следующим образом:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall (x;y) \in U_\delta(x_0;y_0), x \neq x_0; y \neq y_0 \Rightarrow |f(x;y) - A| < \varepsilon.$$

<u>*Пример 8.2.*</u> Найти $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$.

<u>*Решение.*</u> Положим $z = x^2 + y^2$. Очевидно, что если $x \to 0$ и $y \to 0$, то $z \to 0$. Тогда $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1.$

Предел функции двух переменных обладает свойствами, аналогичными свойствам предела функции одной переменной.

Функция $z = f(x;y)$ называется **непрерывной в точке** $M_0(x_0;y_0)$, если предел функции в этой точке существует и равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0).$$

Иначе говоря, функция $z = f(x;y)$ **непрерывна в точке** $M_0(x_0;y_0)$, если она:

1) определена в этой точке и некоторой ее окрестности;

2) существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y)$;

3) выполнено равенство $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0)$.

Функция $z = f(x;y)$ **непрерывна в области,** если она непрерывна во всех точках этой области. Точки, в которых непрерывность нарушается (не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности функции в точке, а именно в этой точке либо функция не определена, либо не существует предела, либо значение функции не равно значению предела), называются

точками разрыва этой функции. Например, для функции $z = \dfrac{1}{y - 2x}$ точками разрыва являются точки прямой $y = 2x$ (их называют **линиями разрыва**).

Для функций двух переменных справедливы теоремы о непрерывных функциях одной переменной.

3. Понятие частных производных и дифференциала функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x; y)$. Так как x и y – независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять свое значение.

1. Переменной x дадим приращение Δx, а y – сохраним неизменным.

Частным приращением функции $z = f(x; y)$ **по переменной** x называется соответствующее приращение функции $\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y)$.

2. Переменной y дадим приращение Δy, а x – сохраним неизменным.

Частным приращением функции $z = f(x; y)$ **по переменной** y называется соответствующее приращение функции $\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y)$.

3. Переменной x дадим приращение Δx, переменной y дадим приращение Δy. **Полное приращение функции** $z = f(x; y)$ определяется равенством $\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$.

Вспомнив определение производной функции одной переменной, можно ввести понятие частных производных функции двух переменных, заменяя обычное приращение функции частным приращением.

Частной производной функции $z = f(x; y)$ **по переменной** x называется предел отношения частного приращения функции к приращению соответствующей переменной, когда это приращение стремится к нулю и обозначается

$$\boxed{z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}.} \tag{8.1}$$

Аналогично определяется **частная производная функции** $z = f(x; y)$ **по переменной** y:

$$\boxed{z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}.} \tag{8.2}$$

Существуют и другие обозначения производной:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=z'_x=f'_x;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}=z'_y=f'_y.$$

Из определения частных производных следует правило их нахождения.

Правило вычисления частной производной функции $z=f(x;y)$ по переменной x

1. Считать переменную y постоянной величиной.

2. Вычислить z'_x, используя формулы и правила вычисления производных функции одной переменной x.

Для нахождения z'_y постоянной предполагается переменная x.

Пример 8.3. Найти частные производные функций:

а) $z=3y^2+2xy+x^2$; б) $z=x^3\cos y$.

Решение. Применяя правила, получим:

а) $z'_x=|y-const|=(3y^2+2xy+x^2)'_x=\left(3y^2\right)'_x+\left(2xy\right)'_x+\left(x^2\right)'_x=0+2y(x)'_x+2x=2y+2x;$

$z'_y=|x-const|=(3y^2+2xy+x^2)'_y=\left(3y^2\right)'_y+\left(2xy\right)'_y+\left(x^2\right)'_y=6y+2x(y)'_y+0=6y+2x.$

б) $z'_x=|y-const\Rightarrow\cos y-const|=\cos y\cdot 3x^2;\qquad z'_y=|x-const\Rightarrow x^3-const|=x^3\cdot(-\sin y).$

Дифференциал функции нескольких переменных

Пусть функция $z=f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные z'_x и z'_y.

Частным дифференциалом по переменной *x* функции z называется произведение $z'_x\Delta x$ и обозначается символом d_xz, то есть $d_xz=z'_x\Delta x$.

Частным дифференциалом по переменной *y* функции z называется произведение $z'_y\Delta y$ и обозначается символом d_yz, то есть $d_yz=z'_y\Delta y$.

Полным дифференциалом функции $z=f(x;y)$ называется сумма частных дифференциалов или сумма произведений частных производных на приращение соответствующей независимой переменной:

$$dz=z'_x\Delta x+z'_y\Delta y\quad\text{или}\quad dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Если в формулу полного дифференциала подставить функцию $z=x$, затем функцию $z=y$, получим:

$$dx=x'_x\Delta x+x'_y\Delta y=\Delta x;\ \ dy=y'_x\Delta x+y'_y\Delta y=\Delta y.$$

Таким образом, как и в случае функции одной переменной, дифференциал независимой переменной совпадает с приращением этой переменной. С учетом этого формулы для полного дифференциала примут вид:

$$\boxed{dz = z'_x dx + z'_y dy} \quad \text{или} \quad \boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.} \tag{8.3}$$

Лекция 8.2. Приложения понятия частных производных

План

1. *Производная по направлению.*
2. *Градиент функции и его применение.*
3. *Частные производные второго порядка для функции двух переменных.*
4. *Экстремум функции двух переменных.*
5. *Наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутой области.*

1. Производная по направлению

Пусть $z = f(x; y)$ дифференцируемая функция двух переменных. Рассмотренные ранее частные производные от функции двух переменных являются «*производными в направлении координатных осей*». Например, при нахождении z'_x приращение получает переменная x, изменяясь от x до $x + \Delta x$ вдоль оси Ox. Целесообразно поставить вопрос об определении и вычислении производной по любому направлению.

Пусть направление движения точки $M(x; y)$ плоскости xOy будет показывать вектор $\overrightarrow{MM_1} = \vec{l}$, где $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$. Обозначим длину вектора $\left|\overrightarrow{MM_1}\right| = \Delta l$. При этом функция получит приращение $\Delta z = f\left(x + \Delta x; y + \Delta y\right) - f\left(x; y\right)$.

Производной функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ **по направлению вектора** $\vec{l}$ называется предел отношения $\dfrac{\Delta z}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$, если он существует. Обозначается z'_l или $\dfrac{\partial z}{\partial l}$. То есть $\dfrac{\partial z}{\partial l} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta l}$.

Производная по направлению характеризует скорость изменения функции в направлении вектора. Если $\dfrac{\partial z}{\partial l} > 0$, то функция $z = f(x; y)$ возрастает в направлении вектора $\vec{l}$, если $\dfrac{\partial z}{\partial l} < 0$, то функция $z = f(x; y)$ убывает в направлении вектора $\vec{l}$.

Механический (физический) смысл производной по направлению состоит в том, что она характеризует мгновенную скорость изменения функции $z = f(x; y)$ в точке M в направлении вектора $\vec{l}$.

Для вычисления производной по направлению функции двух переменных используют формулу

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta,} \qquad (8.4)$$

где $\cos\alpha$ и $\cos\beta -$ направляющие косинусы, то есть косинусы углов, образуемых вектором $\vec{l}$ с осями координат.

<u>*Пример 8.4*</u>. Найти производную функции $z = x^2 + y^2 - xy + 2x + 3y$ в точке $M(-9; -1)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $M_1(4; 5)$.

<u>*Решение.*</u> Вычислим z'_x и z'_y: $z'_x = 2x - y + 2$; $z'_x = 2y - x + 3$. Найдем значения этих производных в точке $M(-9; -1)$: $z'_x(-9; -1) = -15$; $z'_y(-9; -1) = 10$. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{MM_1} = \{13; 6\}$. Вычислим направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{MM_1}$:

$$\cos\alpha = \frac{13}{\sqrt{13^2 + 6^2}} = \frac{13}{\sqrt{205}};\ \cos\beta = \frac{6}{\sqrt{13^2 + 6^2}} = \frac{6}{\sqrt{205}}.$$

Для вычисления производной функции z по направлению $\overrightarrow{MM_1}$ подставим полученные выражения в формулу

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = -15 \cdot \frac{13}{\sqrt{205}} + 10 \cdot \frac{6}{\sqrt{205}} = \frac{-195 + 60}{\sqrt{205}} = -\frac{135}{\sqrt{205}}.$$

2. Градиент функции и его применение

Градиент[1] – характеристика, показывающая направление и величину максимальной скорости изменения функции в данной точке.

Пусть $z = f(x; y)$ дифференцируемая функция двух переменных.

Градиентом функции $z = f(x; y)$ называется вектор, координатами которого являются частные производные функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$, и обозначается $grad\, z$, то есть

$$\boxed{grad\, z = \left\{z'_x; z'_y\right\}} \quad \text{или} \quad \boxed{grad\, z = z'_x \vec{i} + z'_y \vec{j}.} \qquad (8.5)$$

Теорема 8.1. Градиент функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ характеризует направление максимальной скорости возрастания этой функции в данной точке, причем наибольшая скорость возрастания функции в точке равна $|grad\ z| = \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2}$.

[1] От лат. *gradiens* – шагающий. Введен в 1873 г. Джеймсом Клерк Максвеллом (1831–1879) – британским физиком, математиком и механиком.

Итак, градиент – вектор, направленный в сторону наискорейшего возрастания функции и равный по величине мгновенной скорости возрастания функции. Например, если рассмотреть высоту поверхности земли над уровнем моря, то ее градиент в каждой точке поверхности будет показывать «направление самого крутого подъёма», и своей величиной характеризовать крутизну склона.

Пример 8.5. Найти градиент функции $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

Решение. Вычислим частные производные $z'_x = \dfrac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x$;

$z'_y = \dfrac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2y$.

Подставив в формулу (8.5), получим $grad\, z = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}\vec{i} + \dfrac{2y}{x^2 + y^2}\vec{j}$.

Пример 8.6. Найти наибольшую скорость возрастания функции $z = x^2 + 3xy + 2y^2 - 4x + 3y$ в точке $M(1; -2)$.

Решение. Найдем частные производные и их значения в точке M :
$z'_x = 2x + 3y - 4$; $z'_x(1; -2) = 2 + 3 \cdot (-2) - 4 = -8$; $z'_y = 3x + 4y + 3$;
$z'_y(1;-2) = 3 + 4 \cdot (-2) + 3 = -2$.

Градиент функции в точке есть вектор $grad\, z(M) = -8\vec{i} - 2\vec{j}$. Наибольшая скорость возрастания функции равна $|grad\, z| = \sqrt{(-8)^2 + (-2)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$.

3. *Частные производные второго порядка для функции двух переменных*

Пусть $z = f(x; y)$ – дифференцируемая функция двух переменных. Следовательно, для нее можно найти производные $\dfrac{\partial z}{\partial x} = z'_x(x; y)$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y} = z'_y(x; y)$. Назовем их частными производными первого порядка. В свою очередь они могут быть дифференцируемыми функциями своих переменных и также могут иметь частные производные по каждой их этих переменных.

Частными производными второго порядка от функции называются производные от частных производных первого порядка. Рассмотрим частную производную $z'_x(x; y)$. От этой производной возьмем производную по переменной *x* и по переменной *y*. Таким образом, $(z'_x)'_x = z''_{xx}$ и $(z'_x)'_y = z''_{xy}$.

Аналогично получаем $(z'_y)'_x = z''_{yx}$ и $(z'_y)'_y = z''_{yy}$.

Следовательно, частных производных второго порядка от функции $z = f(x; y)$ будет четыре: z''_{xx}; z''_{xy}; z''_{yx}; z''_{yy}. Иногда применяют обозначения:

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\ z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};\ z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x};\ z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Производные z''_{xy}; z''_{yx} называют **смешанными производными.**

<u>*Пример 8.7*</u>. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^4 + 4x^2y^3 - y^6 + 3$.

<u>*Решение*</u>.

$$z'_x = \left(x^4\right)'_x + \left(4x^2y^3\right)'_x - \left(y^6\right)'_x + \left(3\right)'_x = 4x^3 + 4y^3 2x - 0 + 0 = 4x^3 + 8xy^3;$$

$$z'_y = \left(x^4\right)'_y + \left(4x^2y^3\right)'_y - \left(y^6\right)'_y + \left(3\right)'_y = 0 + 4x^2 3y^2 - 6y^5 + 0 = 12x^2y^2 - 6y^5;$$

$$z''_{xx} = \left(4x^3 + 8xy^3\right)'_x = 12x^2 + 8y^3;$$

$$z''_{yy} = \left(12x^2y^2 - 6y^5\right)'_y = 24x^2y - 30y^4;\ z''_{xy} = \left(4x^3 + 8xy^3\right)'_y = 24xy^2;$$

$$z''_{yx} = \left(12x^2y^2 - 6y^4\right)'_x = 24xy^2.$$

В примере оказалось, что смешанные частные производные равны, то есть $z''_{xy} = z''_{yx}$. Приводимая ниже теорема утверждает, что это не простое совпадение.

Теорема 8.2 (*Шварца*[2]). Если частные производные n-го порядка непрерывны, то смешанные производные того же порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

В частности, для $z = f(x; y)$ имеем $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Согласно этой теореме смешанные производные можно вычислять в любом порядке и нет необходимости находить обе смешанные производные.

Частные производные второго порядка используются при нахождении экстремальных значений функции двух переменных.

4. Экстремум функции двух переменных

Понятие точек экстремума и самого экстремума функции $z = f(x; y)$ вводится по аналогии с функциями одной переменной $y = f(x)$.

Понятие точек экстремума

Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется **точкой максимума** функции $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность точки M_0, что для всех точек $M(x; y)$ из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x; y) \le f(x_0; y_0).$$

Значение $z(M_0) = f(x_0; y_0) -$ **максимум функции** $z = f(x, y)$ в точке M_0.

[2] Герман Шварц (1843–1921) – немецкий математик, член Берлинской академии наук, профессор Галльского, Цюрихского, Гёттингенского и Берлинского университетов.

Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется **точкой минимума** функции $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность точки M_0, что для всех точек $M(x; y)$ из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x; y) \geq f(x_0; y_0).$$

Значение $z(M_0) = f(x_0; y_0)$ – **минимум функции** $z = f(x; y)$ в точке M_0.

Точки максимума и точки минимума называют **точками экстремума**.

Теорема 8.3 (*необходимое условие экстремума*). Если дифференцируемая функция $z = f(x; y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ экстремум, то частные производные первого порядка в этой точке равны нулю, то есть

$$z'_x(x_0; y_0) = 0; \quad z'_y(x_0; y_0) = 0.$$

Точки, в которых частные производные первого порядка равны нулю, называются **«подозрительными» на экстремум** или **стационарными.**

Замечание 1. Функция может иметь экстремум и в точках, в которых одна или обе производные не существуют, то есть функция не дифференцируема. Например, функция $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ имеет минимум в точке $O(0; 0)$, но очевидно не имеет в этой точке частных производных.

Замечание 2. Равенство нулю частных производных первого порядка является лишь необходимым, но не достаточным условием экстремума. Например, для функции $z = xy$ частные производные в точке $O(0; 0)$ равны нулю, но точка $O(0; 0)$ не является экстремумом для этой функции.

Теорема 8.5. (*достаточное условие экстремума*). Пусть в стационарной точке $M_0(x_0; y_0)$ и в некоторой ее окрестности функция $z = f(x; y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Положим

$$A = z''_{xx}(x_0; y_0), \quad B = z''_{xy}(x_0; y_0), \quad C = z''_{yy}(x_0; y_0)$$

и определим величину $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$,

Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то функция $z = f(x; y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0; y_0)$: максимум при $A < 0$, и минимум при $A > 0$;

2) если $\Delta < 0$, то функция $z = f(x; y)$ не имеет экстремума в точке $M_0(x_0; y_0)$;

3) если $\Delta = 0$, то функция $z = f(x; y)$ может иметь экстремум в точке $M_0(x_0; y_0)$, а может не иметь. Требуются дополнительные исследования.

Алгоритм нахождения экстремумов дифференцируемой функции двух переменных $z = f(x; y)$

1. Найти частные производные первого порядка z'_x и z'_y.

2. Найти стационарные точки, решив систему $\begin{cases} z'_x(x;y)=0, \\ z'_y(x;y)=0. \end{cases}$

3. Найти частные производные второго порядка z''_{xx}; z''_{xy}; z''_{yy}.

4. Вычислить значения A, B, C в каждой стационарной точке и для каждой найти значение Δ.

5. Сделать вывод о существовании экстремума в каждой стационарной точке на основе достаточного условия экстремума.

6. Найти экстремальные значения функции.

<u>*Пример 8.8.*</u> Исследовать на экстремум функцию

$z = x^3 + 4x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y.$

<u>*Решение.*</u> 1. Найдем $z'_x = 3x^2 + 8x + 2y - 2 = 0$ и $z'_y = 2x + 2y - 2 = 0.$

2. Решим систему

$$\begin{cases} 3x^2 + 8x + 2y - 2 = 0, \\ 2x + 2y - 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 8x + 2y - 2 = 0, \\ y = 1 - x, \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = 3. \end{cases} \end{array} \right.$$

Итак, найдены две стационарные точки $M_1(0;1)$ и $M_2(-2;3)$.

3. Найдем $z''_{xx} = 6x + 8,$ $z''_{xy} = 2,$ $z''_{yy} = 2.$

4. а) для точки $M_1(0;1)$ имеем:

$A = z''_{xx}(0;1) = 6 \cdot 0 + 8 = 8,$ $B = z''_{xy}(0;1) = 2,$

$C = z''_{yy}(0;1) = 2 \;\; \Rightarrow \;\; \Delta = AC - B^2 = 12 > 0.$

Так как $\Delta > 0$ и $A > 0,$ то по достаточному условию экстремума функция z имеет в точке $M_1(0;1)$ минимум, причем

$z_{\min} = z(M_1) = z(0;1) = 0^3 + 4 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 1^2 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -1.$

б) для точки $M_2(-2;3)$ имеем:

$A = z''_{xx}(-2;3) = 6 \cdot (-2) + 8 = -4,$ $B = z''_{xy}(-2;3) = 2,$

$C = z''_{yy}(-2;3) = 2 \;\; \Rightarrow \;\; \Delta = AC - B^2 = -12 < 0.$

Так как $\Delta < 0,$ то экстремум в точке $M_2(-2;3)$ отсутствует.

5. Наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутой области

Пусть функция $z = f(x;y)$ непрерывна в области D, ограниченной замкнутым контуром L. Если наибольшее или наименьшее значение достигается в точке $M_0(x_0;y_0)$, лежащей внутри области D, то в этой точке функция $z = f(x;y)$ имеет максимум или минимум. Наибольшее или наименьшее значение функция также может достигать и в точке, лежащей на контуре L. Тогда если контур задан уравнением $y = \varphi(x)$, то на контуре функция $z = f(x; y)$ оказывается функцией одного аргумента $z = f(x; \varphi(x))$ и вопрос сводится к задаче нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения дифференцируемой функции двух переменных $z = f(x; y)$ в области D

1. Найти стационарные точки, расположенные внутри области D, и вычислить значения функции в них.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x; y)$ на линиях, образующих границы области D.

3. Выбрать наибольшее и наименьшее значения из всех найденных.

Пример 8.9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ в области D, ограниченной линиями:

$x = 0; \quad y = 0; \quad x + y = 3.$

Решение. 1. Найдем стационарные точки функции z:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 1 = 0, \\ 2y - x - 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Получили единственную стационарную точку $M(1; 1)$, которая лежит внутри области D, то есть в треугольнике OAB (рис. 8.2). Значение $z(M) = z(1; 1) = -1$.

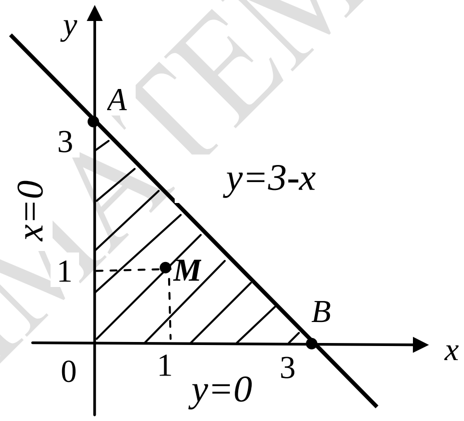

Рис. 8.2

2. Исследуем функцию на каждой линии области D, состоящей из трех сторон треугольника OAB.

а) на стороне OA имеем $x = 0; \quad 0 \le y \le 3$, отсюда

$$z = 0^2 + y^2 - 0 \cdot y - 0 - y = y^2 - y,$$

где $y \in [0; 3]$. $z'_y = 2y - 1; \quad 2y - 1 = 0; \quad y = 0{,}5.$

Значения функции $z(0{,}5) = -0{,}25, \quad z(0) = 0, \quad z(3) = 6;$

б) на стороне OB имеем $y = 0; \quad 0 \le x \le 3$, отсюда

$$z = x^2 + 0^2 - x \cdot 0 - x - 0 = x^2 - x,$$

где $x \in [0;3]$. $z'_x = 2x - 1; \quad 2x - 1 = 0; \quad x = 0{,}5.$

Значения функции $z(0{,}5) = -0{,}25, \quad z(0) = 0, \quad z(3) = 6;$

в) на стороне AB имеем $y = 3 - x; \quad 0 \le x \le 3,$ отсюда

$z = x^2 + (3 - x)^2 - x(3 - x) - x - (3 - x) = 3x^2 - 9x + 6,$

где $x \in [0;\, 3].$ $z'_x = 6x - 9; \quad 6x - 9 = 0; \quad x = 1{,}5.$

Значения функции $z(1{,}5) = -0{,}75, \quad z(0) = 6, \quad z(3) = 6.$

3. Сравнивая полученные результаты, делаем вывод: наибольшее значение $z_{наиб} = 6$ функция достигает в точках $(3;\, 0)$ и $(0;\, 3)$; наименьшее значение $z_{наим} = -1$ в точке $M(1;\, 1).$