Тема 9

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Лекция 9.1. Первообразная и неопределенный интеграл

П л а н

1. Определение первообразной и неопределенного интеграла.
2. Непосредственное интегрирование.
3. Основные методы интегрирования.

1. Определение первообразной и неопределенного интеграла

Функция $F(x)$ называется **первообразной для функции** $f(x)$ на множестве X, если для любого $x \in X$ выполняется равенство

$$\boxed{F'(x) = f(x).} \qquad (9.1)$$

Например,

1) $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ – первообразная для $f(x) = x^2$, так как

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x).$$

2) $F(x) = \sin x$ – первообразная для $f(x) = \cos x$, так как

$$F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x).$$

Однако $F(x) = \sin x + C$, $(C - const)$ – тоже первообразная для $f(x) = \cos x$, так как

$$F'(x) = (\sin x + C)' = \cos x + 0 = \cos x = f(x).$$

Таким образом, если $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, то $F(x) + C$, где $C - const$, также является первообразной для $f(x)$. Действительно,

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

УЗНАЙМАТЕМАТИК.РФ

Возникает вопрос: исчерпывается ли множество всех первообразных для функции $f(x)$ выражением вида $F(x)+C$, где $F(x)-$ одна из первообразных функции $f(x)$, а $C-$ произвольная постоянная.

Теорема 9.1 (*об общем виде первообразной*). Две различные первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ одной и той же функции $f(x)$, определенной на промежутке X, отличаются друг от друга на постоянное слагаемое, то есть $F_1(x)-F_2(x)=C$.

Таким образом, если известна хотя бы одна из первообразных для функции $f(x)$, то известно и все множество первообразных для этой функции.

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется множество всех первообразных функции $f(x)$ и обозначается

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x)+C,} \tag{9.2}$$

где $f(x)-$ **подынтегральная функция**; $C-$ произвольная постоянная; $f(x)dx-$ **подынтегральное выражение;** $x-$ **переменная интегрирования**. Процесс нахождения неопределенного интеграла называют **интегрированием**.

Например, $\int \cos x dx = \sin x + C,$ так как $(\sin x)' = \cos x.$

$\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C,$ так как $\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = x^3;$

$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C,$ так как $\left(2\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x}};$

$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx + C,$ так как $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}.$

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл – это некоторое семейство кривых, порожденное всевозможным параллельным переносом вдоль оси Oy одной первообразной.

Свойства неопределенного интеграла

Будем считать, что все рассматриваемые функции определены на промежутке X, функция $F(x)$ непрерывна и дифференцируема во всех внутренних точках X.

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, то есть

$$\boxed{\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).} \tag{9.3}$$

$\square$ $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x)+0 = f(x).$ $\blacksquare$

УЗНАЙМАТЕМАТИКУ.РФ

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, то есть

$$\boxed{d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.} \tag{9.4}$$

□ По определению дифференциала имеем

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx. \blacksquare$$

3. Интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной, то есть

$$\boxed{\int dF(x) = F(x) + C.} \tag{9.5}$$

□ По определению дифференциала и определению неопределенного интеграла имеем

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C. \blacksquare$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых, то есть (для двух функций)

$$\boxed{\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.} \tag{9.6}$$

□ Пусть $F_1'(x) = f_1(x)$ и $F_2'(x) = f_2(x)$. Тогда

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int \left(F_1'(x) \pm F_2'(x)\right)dx = \int \left(F_1(x) \pm F_2(x)\right)' dx = \int d\left(F_1(x) \pm F_2(x)\right) =$$
$$= F_1(x) \pm F_2(x) + C = \left(F_1(x) + C_1\right) \pm \left(F_2(x) + C_2\right) = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx. \blacksquare$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, то есть для $k \neq 0$ выполнено

$$\boxed{\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.} \tag{9.7}$$

□ По свойству дифференцирования $kF'(x) = \left(kF(x)\right)'$ имеем

$$\int kf(x)dx = \int kF'(x)dx = \int \left(kF(x)\right)' dx = \int d\left(kF(x)\right) = kF(x) + C_1 = k\left(F(x) + \frac{C_1}{k}\right) =$$
$$= \left| \textit{обозначим}\, \frac{C_1}{k} = C \right| = k\left(F(x) + C\right) = k\int f(x)dx. \blacksquare$$

6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C,$ то $\int f(u)du = F(u) + C,$ где $u = u(x)$ – произвольная дифференцируемая функция. Это свойство называется **свойством инвариантности формул интегрирования**.

УЗНАЙМАТЕМАТИКУ.РФ

2. Непосредственное интегрирование

Из таблицы производных и определения неопределенного интеграла несложно получить таблицу интегралов.

Таблица 9.1

$\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$ (1)	$\int \sin u du = -\cos u + c$ (6)	$\int \dfrac{du}{1+u^2} = arctgu + c$ (11)
$\int du = u + c$ (2)	$\int \cos u du = \sin u + c$ (7)	$\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + c$ (12)
$\int \dfrac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + c$ (3)	$\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tgu + c$ (8)	$\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{u}{a} + c$ (13)
$\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c$ (4)	$\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + c$ (9)	$\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + c$ (14)
$\int e^u du = e^u + c$ (5)	$\int \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c$ (10)	$\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\cdot\ln\left\lvert\dfrac{u-a}{u+a}\right\rvert + c$ (15)

Интегралы, содержащиеся в таблице, принято называть **табличными.**

Одним из простейших методов интегрирования является метод непосредственного интегрирования.

Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование – метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Пример 9.1. Вычислить $\int (x^5 + \cos x - 2e^x + \dfrac{1}{x} + 7)dx.$

Решение. Применив свойства 4 и 5 и таблицу интегралов, получаем

$$\int (x^5 + \cos x - 2e^x + \frac{1}{3x} + 7)dx = \int x^5 dx + \int \cos x dx - \int 2e^x dx + \int \frac{1}{3x} dx + \int 7dx =$$

$$= \int x^5 dx + \int \cos x dx - 2\int e^x dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x} dx + 7\int dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + \sin x - 2e^x + \frac{1}{3}\ln\lvert x\rvert + 7x + C =$$

$$= \frac{x^6}{6} + \sin x - 2e^x + \frac{\ln\lvert x\rvert}{3} + 7x + C.$$

Обратим внимание, что ставить произвольную постоянную после вычисления каждого интеграла не следует: обычно все произвольные постоянные суммируются и результат обозначается одной буквой C.

Пример 9.2. Вычислить $\int \left(\dfrac{5}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)dx.$

УЗНАЙМАТЕМАТИКУ.РФ

Решение. Применим свойства 4 и 5 и таблицу интегралов, получаем

$$\int\left(\frac{5}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=5\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=5\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-\frac{1}{2}\ln|x|+tgx+C=$$

$$=10\sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln|x|+tgx+C.$$

Далеко не всякий интеграл можно вычислить путем непосредственного интегрирования на основании свойств интеграла и таблицы 9.1.

3. Основные методы интегрирования

Метод интегрирования подстановкой

Самым распространенным способом сведения интегралов к табличным является **метод подстановки** (или метод замены переменной). Суть этого метода заключается в том, что путем введения новой переменной интегрирования удается свести данный интеграл к новому интегралу, который сравнительно легко вычисляется непосредственно. Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$. Переменную x заменим функцией $\varphi(t)$, имеющей непрерывную производную. При этом подстановку нужно выполнить во всем подынтегральном выражении, включая дифференциал. Если $x=\varphi(t)$, $dx=d(\varphi(t))=\varphi'(t)dt$, то

$$\boxed{\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.} \tag{9.8}$$

Даная формула называется **формулой замены переменной в неопределенном интеграле.**

Замечание 1. Выполнив интегрирование, необходимо обязательно вернуться к первоначальной переменной.

Замечание 2. В практике интегрирования применяются подстановки вида $t=\psi(x)$, то есть новая переменная интегрирования вводится как некоторая функция переменной x.

Пример 9.3. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+1}$.

Решение. Введем новую переменную $\sqrt[3]{x}=t$. Такая замена обусловлена попыткой избавиться от корня в знаменателе подынтегрального выражения.

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+1}=\left|\begin{matrix}x=t^3\\ dx=3t^2dt\end{matrix}\right|=\int\frac{3t^2dt}{t+1}=3\int\frac{(t^2-1)+1}{t+1}dt=3\int\frac{(t-1)(t+1)+1}{t+1}dt=3\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=3\int tdt-3\int dt+3\int\frac{d(t+1)}{t+1}=\frac{3}{2}t^2-3t+3\ln|t+1|+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}+3\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|+C.$$

УЗНАЙМАТЕМАТИКУ.РФ

Компактной формой метода подстановки является **метод подведения выражения под знак дифференциала**. Этот метод не требует явного введения новой переменной, а затем возвращения к старой, что делает выкладки более краткими. В его основе лежит свойство инвариантности формул интегрирования: если $\int f(x)dx = F(x) + C,$ то $\int f(u)du = F(u) + C,$ где $u = u(x) -$ произвольная дифференцируемая функция от x.

Рассмотрим один из табличных интегралов $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C.$ По свойству 6 эта формула остается справедливой не только в случае, когда $x -$ независимая переменная, но и тогда, когда вместо x стоит некоторая дифференцируемая функция, например $\int \sin xd\sin x = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$

Аналогичная ситуация имеет место и для других формул:

$$\int (2x+1)^5 d(2x+1) = \frac{(2x+1)^6}{6} + C;$$

$$\int \frac{d(x-3)}{\cos^2(x-3)} = tg(x-3) + C;$$

$$\int \frac{d(x^2+5)}{(x^2+5)} = \ln\left|x^2+5\right| + C.$$

<u>*Пример 9.4*</u>. Вычислить интеграл $\int (x+2)^{100} dx.$

Решение. Что мешает применить из табл. 9.1 степенной интеграл (1) для $n = 100$? Понятно, что если бы под знаком дифференциала стояло выражение $x+2$, а не x, то такой интеграл был бы табличным. Вопрос: возможно ли заменить dx на $d(x+2)$? Ответ: да, по свойству дифференциала: $d(x+2) = (x+2)' dx = 1dx = dx.$

Значит, $\int (x+2)^{100} dx = \int (x+2)^{100} d(x+2) = \frac{(x+2)^{101}}{101} + C.$

<u>*Пример 9.5*</u>. Вычислить интеграл $\int (5x+2)^{100} dx.$

Решение. Для применения табличной формулы степенного интеграла при $n = 100$ необходимо, чтобы под знаком дифференциала стояло выражение $5x+2$ вместо x. Вопрос: возможно ли заменить dx на $d(5x+2)$? Ответ – да, введя поправочный коэффициент. По свойству дифференциала: $d(kx) = (kx)' dx = kdx$ или $dx = \frac{1}{k} d(kx).$ Значит, $dx = \frac{1}{5} d(5x+2).$ Следовательно,

$$\int (5x+2)^{100} dx = \int (5x+2)^{100} \frac{1}{5} d(5x+2) = \frac{1}{5}\int (5x+2)^{100} d(5x+2) = \frac{1}{5}\frac{(5x+2)^{101}}{101} + C = \frac{(5x+2)^{101}}{505} + C.$$

В рассмотренных выше примерах дифференциал изменялся на основании его свойств, то есть вместо x под знак дифференциала

УЗНАЙМАТЕМАТИКУ.РФ

подводилась некоторая линейная функция вида $kx+b$, где k и $b-$ некоторые числа, причем $k \neq 0$. Обобщим это в виде теоремы.

Теорема 9.2. Пусть $F(x)-$одна из первообразных для $f(x)$. Тогда

$$\boxed{\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C,} \qquad (9.10)$$

где k и $b-$ некоторые числа, причем $k \neq 0$.

□ Для доказательства равенства возьмем производную от правой части формулы (9.10) и покажем, что она равна подынтегральной функции:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)+C\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot(kx+b)' + C' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k + 0 = F'(kx+b) = f(kx+b). \blacksquare$$

Часто используемые «**подведения выражений под знак дифференциала**»:

$$\boxed{\begin{array}{l}
dx = d(x+b) \quad (b-const); \quad dx = \dfrac{1}{k}d(kx), \quad (k-const, k\neq 0);\\
xdx = \dfrac{1}{2}d(x^2); \quad x^2dx = \dfrac{1}{3}dx^3; \ldots; \quad x^n dx = \dfrac{1}{n+1}dx^{n+1};\\
\dfrac{dx}{x} = d(\ln x), \quad e^x dx = d\left(e^x\right),\\
\cos x dx = d(\sin x); \quad \sin x dx = -d(\cos x); \quad \dfrac{dx}{\cos^2 x} = d(tgx); \quad \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -d(ctgx);\\
\dfrac{dx}{1+x^2} = d(arctgx); \quad \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x).
\end{array}} \qquad (9.11)$$

Пример 9.6. Найти интегралы: а) $\int \frac{xdx}{x^2+5}$; б) $\int cos^3 x \sin x dx$.

Решение. а) Подведем функцию x под знак дифференциала. Имеем

$$\int\frac{xdx}{x^2+5} = \frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{x^2+5} = \frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+5\right)}{x^2+5} = \left| \begin{array}{c} x^2+5=u \\ \int\frac{du}{u} = \ln|u|+C \end{array} \right| = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+5\right)+C.$$

б) Подведем функцию $\sin x$ под знак дифференциала. Имеем

$$\int cos^3 x\sin xdx = -\int\cos^3 xd\left(\cos x\right) = \left| \begin{array}{c} \cos x = u \\ \int u^3du = \frac{u^4}{4}+C \end{array} \right| = -\frac{\cos^4 x}{4}+C.$$

Итак, цель метода подведения под знак дифференциала состоит в видоизменении дифференциала, стоящего под интегралом, за счет использования свойств дифференциала.

Метод интегрирования по частям

УЗНАЙМАТЕМАТИКУ.РФ

Еще одним из способов сведения сложных интегралов к простым является метод интегрирования по частям, который состоит в применении формулы

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du,} \tag{9.12}$$

называемой **формулой интегрирования по частям**. Суть данного метода состоит в том, что при нахождении интеграла подынтегральное выражение $f(x)dx$ представляют в виде произведения множителей u и dv, при этом dx обязательно входит в dv. Затем находят интегралы $\int dv$ и $\int v du$. Естественно, что этот метод применим лишь в случае, если задача нахождения указанных интегралов более проста, чем задача нахождения исходного интеграла.

Пример 9.7. Найти интеграл $\int x\cos x dx$.

Решение. Применим к данному интегралу формулу интегрирования по частям, для этого за u обозначим x, а все остальное за dv. Получим

$$\int x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x & du = (x)' dx = dx \\ dv = \cos x dx & v = \int \cos x dx = \sin x \end{vmatrix} = x\cdot\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Заметим, что при нахождении v достаточно найти какую-нибудь одну из первообразных. Удобно считать $C = 0$.

Замечание 1. Интегрирование по частям можно применять последовательно несколько раз в одном и том же примере.

Замечание 2. При вычислении интегралов методом интегрирования по частям главным является разумное разбиение подынтегрального выражения на множители u и dv.

Классификация интегралов, вычисляемых методом интегрирования по частям

1. Интегралы вида

$$\boxed{\int P_n(x)e^{\alpha x}dx; \quad \int P_n(x)\sin \alpha x dx; \quad \int P_n(x)\cos \alpha x dx,}$$

где α – число; $P_n(x)$ – многочлен степени n.

Для их вычисления рекомендуют положить $u = P_n(x)$, а в качестве dv выбрать оставшуюся часть подынтегрального выражения.

Пример 9.8. Вычислить $\int (3x+1)e^{3x}dx$.

Решение. $\int (3x+1)\cdot e^{3x}dx = \begin{vmatrix} u = 3x+1 & du = (3x+1)' dx = 3dx \\ dv = e^{3x}dx & v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{vmatrix} =$

$$= (3x+1)\frac{1}{3}e^{3x} - \int 3\cdot\frac{1}{3}e^{3x}dx = \frac{3x+1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} + C.$$

УЗНАЙМАТЕМАТИКУ.РФ

2. Интегралы вида

$$\boxed{\begin{array}{l}\int P_n(x)\cdot\ln\alpha x dx;\ \int P_n(x)\cdot\arcsin\alpha x dx,\ \int P_n(x)\cdot\arccos\alpha x dx;\\ \int P_n(x)\cdot arctg\alpha x dx;\ \int P_n(x)\cdot arcctg\alpha x dx,\end{array}}$$

где $\alpha -$ число; $P_n(x) -$ многочлен степени *n*.

Для их вычисления рекомендуют положить $dv = P_n(x)dx,$ а в качестве u выбрать оставшуюся функцию.

<u>*Пример 9.9.*</u> Вычислить $\int x^{100}\ln x dx.$

<u>*Решение*</u>. $$\int x^{100}\cdot\ln x dx = \left|\begin{array}{ll} u=\ln x & du=(\ln x)'dx=\dfrac{1}{x}dx\\ dv=x^{100}dx & v=\int x^{100}dx=\dfrac{x^{101}}{101}\end{array}\right| =$$

$$=\frac{\ln x\cdot x^{101}}{101}-\int\frac{x^{101}}{101\cdot x}dx=\frac{\ln x\cdot x^{101}}{101}-\frac{x^{101}}{101^2}+C.$$

3. Интегралы вида

$$\boxed{\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx,\quad \int e^{\alpha x}\cos\beta x,}$$

где $\alpha,\quad \beta$ – числа.

Следует проинтегрировать по частям дважды, каждый раз выбирая в качестве u одну и ту же функцию, затем будет получено уравнение, в котором в качестве неизвестного выступает вычисляемый интеграл.

Лекция 9.2. Интегрирование некоторых элементарных функций

П л а н

1. Интегрирование дробно-рациональных функций.
2. Интегрирование некоторых тригонометрических функций.
3. «Неберущиеся» интегралы.

1. Интегрирование дробно-рациональных функций

Дробно-рациональной функцией (или **рациональной дробью**) называется функция, равная отношению двух многочленов

$$\boxed{\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n},}\qquad(9.13)$$

УЗНАЙМАТЕМАТИКУ.РФ

где $a_0, a_1, \ldots, a_m, b_0, b_1, \ldots, b_n -$ постоянные коэффициенты.

Дробь называется **правильной**, если степень ее числителя меньше степени ее знаменателя, то есть $m < n$; если $m \ge n$ дробь называется **неправильной**.

Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. Для этого надо разделить числитель на знаменатель по правилу деления многочленов «столбиком».

Например,

$$\begin{array}{rr|l} - & x^3 - x^2 - 3x - 7 & x^2 + 2x + 4 \\ \cline{3-3} & x^3 + 2x^2 + 4x & x - 3 \\ \cline{2-2} - & -3x^2 - 7x - 7 & \\ & -3x^2 - 6x - 12 & \\ \cline{2-2} & -x + 5 & \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x^3 - x^2 - 3x - 7}{x^2 + 2x + 4} = x - 3 + \frac{-x + 5}{x^2 + 2x + 4}$$

Поскольку интегрирование многочлена не составляет никаких трудностей, то задача интегрирования произвольной рациональной дроби сводится к задаче интегрирования правильной рациональной дроби.

Разложение правильной рациональной дроби на простейшие

Простейшие рациональные дроби это дроби вида:

$\dfrac{A}{x-a}$ – *простейшая дробь первого типа*;

$\dfrac{A}{(x-a)^k}$ – *простейшая дробь второго типа*;

$\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ – *простейшая дробь третьего типа*;

$\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ – *простейшая дробь четвертого типа*;

где $D = p^2 - 4q < 0$; $k \in N$, $k \ge 2$; $A, M, N, a, p, q -$ действительные числа.

Теорема 9.3. Любую правильную рациональную дробь можно разложить на сумму простейших дробей.

Например, правильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $Q(x) = (x-a)^k (x-b)^l \ldots \left(x^2 + px + q\right)^m$, можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей:

УЗНАЙМАТЕМАТИКУ.РФ

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_l}{(x-b)^l}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$
$$\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m},$$

где A_i, B_i, M_i, N_i – числа $(i=1, 2, \ldots)$.

Поясним формулировку теоремы на следующих примерах:

1) $\frac{7x^2-21x+8}{(x-2)^2(x+1)}=\frac{A}{(x-2)^2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}$;

2) $\frac{2x^2+3}{x^3(x-4)(x^2+2x+7)}=\frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x-4}+\frac{Mx+N}{x^2+2x+7}$;

3) $\frac{x-1}{(x^2+1)(x^2+x+2)}=\frac{Mx+N}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+2}$.

где A, B, C, D, M, N – неопределенные (пока!) числа, которые нужно найти (их называют неопределенными коэффициентами). Для их нахождения применяют или *метод сравнения коэффициентов,* или *метод отдельных значений коэффициентов* (табл. 9.2).

Алгоритм методов

Таблица 9.2

Метод сравнения коэффициентов	Метод отдельных значений коэффициентов
1. Приведем к общему знаменателю слагаемые правой части разложения; получим тождество $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{S(x)}{Q(x)}$, где $S(x)$ – многочлен с неопределенными коэффициентами	
2. Приравняем числители $P(x)\equiv S(x)$, так как знаменатели равны	
3. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x. Получим систему, из которой найдем искомые коэффициенты	3. Придадим x конкретные значения («удобные» значения – действительные корни многочлена $Q(x)$) столько раз, сколько неопределенных коэффициентов

<u>*Пример 9.10.*</u> Разложить дробь на простейшие $\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}$.

<u>*Решение*</u>. По теореме 9.3 разложим дробь на простейшие: $\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}$.

Найдем коэффициенты методом отдельных значений коэффициентов:

1) $\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}=\frac{A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$;

2) $3x-4=A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)$;

3) пусть $x=0$, тогда $-4=-2A$, то есть $A=2$;

УЗНАЙМАТЕМАТИКУ.РФ

пусть $x=-1,$ тогда $-7=3C,$ то есть $C=-\frac{7}{3};$

пусть $x=2,$ тогда $2=6B,$ то есть $B=\frac{1}{3}.$

Следовательно, $\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}=\frac{2}{x}+\frac{\frac{1}{3}}{x-2}+\frac{-\frac{7}{3}}{x+1}.$

Интегрирование простейших рациональных дробей

1. $\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\cdot\ln|x-a|+C;.$

2. $\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int(x-a)^{-k}d(x-a)=A\cdot\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C;.$

3. $\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\left|x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right|=\int\frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}dx=$

$$=\left|\begin{array}{c} x+\frac{p}{2}=t \\ x=t-\frac{p}{2} \\ dx=dt \\ q-\frac{p^2}{4}=a^2 \end{array}\right|=\int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt=M\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a}+C=\left|t=x+\frac{p}{2}\right|=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+$$

$$+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}.$$

Правило интегрирования рациональных дробей $\frac{P(x)}{Q(x)}$

1. Выделяем целую часть, если дробь неправильная.
2. Разлагаем знаменатель $Q(x)$ на линейные множители, соответствующие действительным корням, и квадратные трехчлены, соответствующие комплексным корням. (*Все, что в знаменателе можно разложить на множители – раскладываем на множители*).
3. Разлагаем правильную дробь на сумму простейших дробей.
4. Интегрируем целую часть (если она есть) и простейшие дроби.
5. Складываем полученные интегралы.

<u>*Пример 9.11.*</u> Вычислить интеграл $\int\frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}dx.$

УЗНАЙМАТЕМАТИКУ.РФ

Решение. 1. Выделим целую часть данной неправильной дроби

$$\frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}=x+7+\frac{37x-35}{x^2-6x+5}.$$

2. Разложим знаменатель на линейные множители по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения, то есть $x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$.

$$\frac{37x-35}{x^2-6x+5}=\frac{37x-35}{(x-1)(x-5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-5}=\frac{A(x-5)+B(x-1)}{(x-1)(x-5)}=$$

$$=\frac{Ax-5A+Bx-B}{(x-1)(x-5)}=\frac{(A+B)x-5A-B}{(x-1)(x-5)}.$$

Найдем A и B методом сравнения коэффициентов:

$$\begin{cases} A+B=37, \\ -5A-B=-35. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-0{,}5, \\ B=37{,}5. \end{cases}$$

Значит, разложение правильной дроби на сумму простейших дробей имеет вид:

$$\frac{37x-35}{x^2-6x+5}=\frac{-0{,}5}{x-1}+\frac{37{,}5}{x-5}.$$

3.

$$\int\frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}dx=\int\left(x+7+\frac{-0{,}5}{x-1}+\frac{37{,}5}{x-5}\right)dx=\frac{x^2}{2}+7x-0{,}5\ln|x-1|+37{,}5\ln|x-5|+C.$$

2. Интегрирование некоторых тригонометрических функций

1. Интегралы вида $\boxed{\int\sin^m x\cos^n xdx \quad (m;n\in Z)}$ можно свести к табличным, применяя:

а) формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha); \quad \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha); \quad \sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha,$$

в случае если n **и** m – неотрицательные **четные** числа;

б) подстановку $\sin x=t$ $(\cos x=t)$, если n **или** m – **нечетные** числа. Допустим, что n – нечетное число $(n=2k+1)$. Тогда $\int\sin^m x\cos^n xdx=$

$$=\int\sin^m x\cos^{2k+1}xdx=\int\sin^m x\cos^{2k}x\cos xdx=\int\sin^m x\left(\cos^2 x\right)^k d\sin x=$$

$=\int\sin^m x\left(1-\sin^2 x\right)^k d\sin x=|\sin x=t|=\int t^m\left(1-t^2\right)^k dt.$ Интеграл стал табличным.

Пример 9.12. Вычислить интеграл $\int\cos^4 xdx.$

Решение. Здесь $m=0,\ n=4.$ $\int\cos^4 xdx=\int\left(\cos^2 x\right)^2 dx=$

УЗНАЙМАТЕМАТИКУ.РФ

$$=\int\left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int(1+\cos 2x)^2 dx=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\int(1+\cos 4x)dx+C=$$

$$=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}\sin 4x+C=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

Пример 9.13. Вычислить интеграл $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx.$

Решение. Здесь $m=3,\ n=-4,$ и имеет место подстановка $\cos x=t.$ Тогда

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx=\int\frac{\sin^2 x\sin x}{\cos^4 x}dx=-\int\frac{\left(1-\cos^2 x\right)}{\cos^4 x}d\cos x=\left|\cos x=t\right|=-\int\frac{1-t^2}{t^4}dt=$$

$$=-\int\frac{1}{t^4}dt+\int\frac{1}{t^2}dt=\int t^{-2}dt-\int t^{-4}dt=\frac{t^{-1}}{-1}-\frac{t^{-3}}{-3}+C=\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{t}+C=\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C.$$

2. Интегралы вида $\boxed{\int R(\sin x;\cos x)dx,}$ где $R-$ рациональная функция.

С помощью замены переменной $\boxed{t=tg\frac{x}{2},}$ которая называется **универсальной тригонометрической подстановкой**, данный интеграл сводится к интегралу от рациональной дроби, получаемой через соотношения замены:

$$\boxed{\sin x=\frac{2t}{1+t^2};\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.}\tag{9.14}$$

Пример 9.14. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\sin x}.$

Решение. Произведем универсальную тригонометрическую подстановку.

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\left|\begin{array}{l}dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}\\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$$

3. «Неберущиеся» интегралы

К настоящему времени разработано множество методов интегрирования. Мы рассмотрели лишь некоторые из них. Интеграл $\int f(x)dx$

УЗНАЙМАТЕМАТИКУ.РФ

от элементарной функции $f(x)$, который сам является элементарной функцией, называют «берущимся». Оказывается, что берущихся интегралов мало на фоне всех интегралов. Большинство интегралов являются «неберущимися», то есть не представимыми через элементарные функции. Так, например, нельзя взять интеграл $\int \cos x^2 dx$, так как не существует элементарной функции, производная от которой была бы равна $\cos x^2$.

Приведем примеры «неберущихся» интегралов:

$\int e^{-x^2} dx -$ *интеграл Пуассона*[1];

$\int \frac{dx}{\ln x}$; $\int \frac{e^x}{x} dx -$ *интегральный логарифм и экспонента*;

$\int \cos x^2 dx$; $\int \sin x^2 dx -$ *интегралы Френеля*[2];

$\int \frac{\sin x}{x} dx$; $\int \frac{\cos x}{x} dx -$ *интегральный синус и косинус*.

Неберущиеся интегралы имеют богатую историю и многочисленные практические приложения. Интеграл Пуассона, например, описывает один из важнейших законов теории вероятности, а интегралы Френеля применяются в физике.

Лекция 9.3. Определенный интеграл и его вычисление

План
1. *Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.*
2. *Понятие определенного интеграла и его свойства.*
3. *Формула Ньютона – Лейбница и основные методы нахождения определенного интеграла.*

Интегралы, рассмотренные ранее, носили название неопределенных. Само название указывает, что в нем какая-то величина должна быть неопределенна. И это постоянная *C*, которая могла принимать любое числовое значении.

Определенному интегралу в математическом анализе отводится особое место в связи с его практической значимостью. Так, к вычислению определенного интеграла сводится решение задач по нахождению площадей, длин и объемов тел, работы, скорости движущего тела и т.д.

[1] Пуассон Симеон Дени (1781–1840) – французский математик, механик и физик, которого по праву считают одним из создателей современной математической физики.
[2] Френель Огюстен Жан (1788–1827) – французский физик, один из создателей волновой теории света.

УЗНАТЬ МАТЕМАТИКУ.РФ

Существенное отличие определенного интеграла от неопределенного заключается в том, что определенный интеграл выражается некоторым числом. Однако между этими интегралами есть много общего.

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

<u>Задача о массе стержня</u>. Найти массу m стержня, зная его длину l, плотность $\rho(x)$ для любого x, $x \in [0; l]$.

<u>Решение</u>. Если стержень однородный $(\rho(x) = \rho = const)$, то масса $m = \rho \cdot l$.

Пусть стержень неоднородный, то есть $\rho(x) \neq const$. Выполним следующие действия:

1) разобьем стержень точками

$$0 < x_0 < x_1 < \ldots < x_n = l$$

на n произвольных частичных отрезков

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, x_n].$$

Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка разбиения: $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} (\Delta x_i)$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – длина i -го отрезка;

2) выберем произвольную точку $\xi_i \left(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i\right)$ в каждом из полученных частичных отрезков и предположим в силу малости отрезка $[x_{i-1}; x_i]$, что плотность на нем постоянна и равна $\rho = \rho(\xi_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

3) массу i -го отрезка вычислим приближенно $m_i \approx \rho(\xi_i)\Delta x_i$;

4) масса всего стержня приближенно равна

$$m \approx m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \rho(\xi_1)\Delta x_1 + \rho(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + \rho(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta x_i .$$

Это приближенное равенство тем точнее, чем меньше значение λ. Будем производить разбиение стержня на части таким образом, чтобы $\lambda \to 0$ (а тогда $n \to \infty$). Тогда

$$m = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta x_i .$$

<u>Задача о пройденном пути.</u> Найти путь S, пройденный точкой M, зная промежуток времени от $t = a$ до $t = b$ и функцию скорости движения $v(t)$ точки M в момент времени t, $t \in [a; b]$.

<u>Решение</u>. Если M движется равномерно $(v(x) = v = const)$,
то $S = v \cdot (b - a)$.

УЗНАЙМАТЕМАТИКУ.РФ

Пусть движение неравномерное и скорость есть непрерывная функция, то есть $v(x) \neq const.$ Выполним следующие действия:

1) разобьем промежуток времени точками

$$a < t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

на n произвольных частичных отрезков

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_{i-1}, t_i], \ldots, [t_{n-1}, t_n].$$

Означим через λ длину наибольшего частичного отрезка разбиения:

$\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}(\Delta t_i)$, где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ – длина i-го отрезка;

2) выберем произвольную точку $\tau_i \left(t_{i-1} \le \tau_i \le t_i\right)$ в каждом из полученных частичных отрезков и будем считать, что за этот промежуток времени $[t_{i-1}; t_i]$ в силу его малости происходит равномерное движение со скоростью $v = v(\tau_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

3) путь S_i, пройденный точкой M за промежуток времени $[t_{i-1}; t_i]$, приближенно равен $S_i \approx v(\tau_i)\Delta t_i$;

4) путь S, пройденный за время от $t = a$ до $t = b$, приближенно равен

$$S \approx S_1 + S_2 + \ldots + S_n = v(\tau_1)\Delta t_1 + v(\tau_2)\Delta t_2 + \ldots + v(\tau_n)\Delta t_n = \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i.$$

Это приближенное равенство тем точнее, чем меньше λ. Устремляя $\lambda \to 0$ (а тогда $n \to \infty$), в пределе получим

$$S = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i.$$

2. Понятие определенного интеграла и его свойства

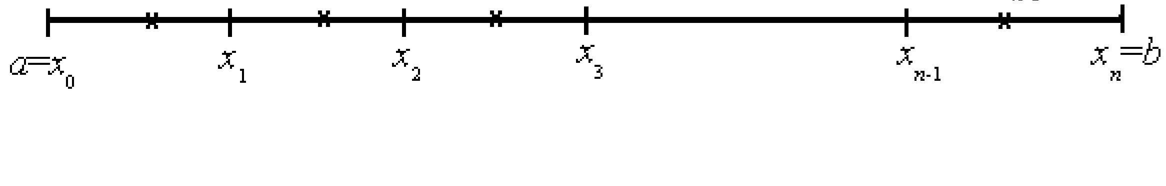
Пусть на отрезке $[a; b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$. Построение понятия определенного интеграла от этой функции по отрезку $[a; b]$ состоит из трех этапов.

1. Разбиение отрезка $[a; b]$ на части.

Разобьем отрезок $[a; b]$ оси Ox на части точками $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ так что

$$a < x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

на n произвольных частичных отрезков $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, x_n].$



УЗНАЙМАТЕМАТИКУ.РФ

Рис. 9.1

Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка разбиения: $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

2. Построение интегральной суммы.

Выберем в каждом из полученных частичных отрезков произвольную точку $\xi_i \left(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i\right)$ и составим сумму

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

которая называется **интегральной суммой Римана** для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Геометрически она представляет собой сумму площадей прямоугольников с основаниями в виде отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ и высотами $f(\xi_i)$ (см. рис. 9.2).

3.

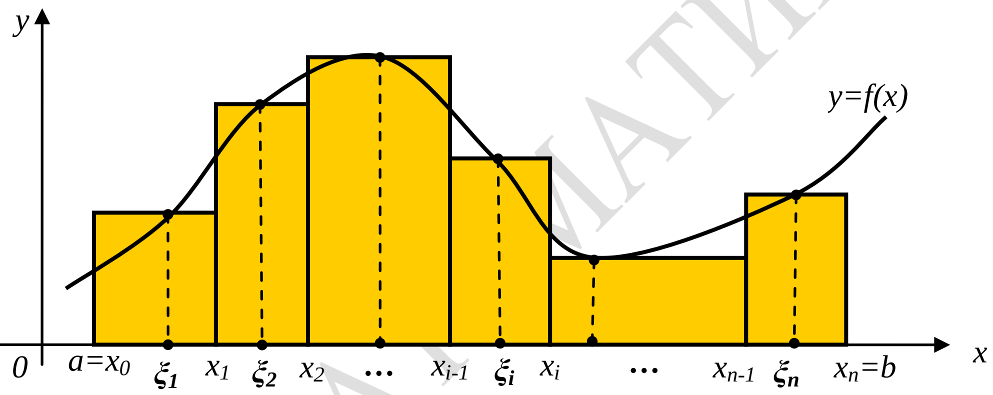


Рис. 9.2

3. Предельный переход.

Найдем предел $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$.

Если такой предел существует и он не зависит:

– от способа разбиения отрезка $[a, b]$,

– выбора точек ξ_i внутри каждого отрезка,

то этот предел называют **определенным интегралом** от функции $y = f(x)$ по отрезку $[a,b]$ и обозначают

$$\boxed{\lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.} \tag{9.15}$$

Функция $y = f(x)$ называется **подынтегральной** функцией, выражение $f(x)dx$ – **подынтегральным выражением,** числа a и b $(a < b)$ называются соответственно **нижним** и **верхним пределами интегрирования**, x – **переменной интегрирования**.

Теорема 9.4. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на нем.

Возвращаясь к рассмотренным выше задачам, получаем:

– масса неоднородного стержня длины l вычисляется по формуле

$$m = \int_0^l \rho(x)dx,$$

где $\rho(x)$ – функция плотности;

– путь, пройденный неравномерно двигающейся точкой за время от $t = a$ до $t = b$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b v(t)dt,$$

где $v(t)$ – функция скорости;

– площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = a,\quad x = b,$ осью Ox и графиком функции $y = f(x)$, вычисляется по формуле

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx.} \tag{9.16}$$

Формула (9.16) означает геометрический смысл определенного интеграла.

Определенный интеграл обладает рядом свойств, аналогичных свойствам неопределенного интеграла, другие справедливы только для него.

Основные свойства определенного интеграла

1. Интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

2. $\int_a^b dx = b - a.$

3. При перестановке местами пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на противоположный: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

4. Интеграл по отрезку равен сумме интегралов по его частям, то есть имеет место равенство: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$ если $c \in (a; b)$.

УЗНАЙМАТЕМАТИКУ.РФ

5. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла: $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx, \quad k$ – число.

6. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых, то есть (для двух функций):

$$\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx.$$

7. **Теорема о среднем**. Если $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует такое число c: $a \le c \le b$, что $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

8. **Теорема Барроу**[3]. Пусть $f(x)$ непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Тогда производная интеграла с переменным верхним пределом равна подынтегральной функции, вычисленной в точке верхнего предела: $\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$.

9. Определенный интеграл зависит только от вида функции $y = f(x)$ и пределов интегрирования, но не от переменной интегрирования, которую можно обозначить любой буквой:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt.$$

Вычисление определенного интеграла как предела интегральной суммы неудобно и трудоемко. Поэтому целесообразно указать более удобный и эффективный способ вычисления определенного интеграла. Основан он на связи неопределенного и определенного интеграла и выражается в формуле Ньютона[4] – Лейбница.

3. Формула Ньютона – Лейбница и основные методы нахождения определенного интеграла

Теорема 9.5. Если $F(x)$ есть первообразная для непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$, то справедлива формула

[3] Барроу Исаак (1630–1677) – английский математик, филолог и богослов. Профессор Кембриджского университета. Учитель И. Ньютона

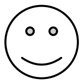
[4] Исаак Ньютон (1643–1727) – английский физик, математик, астроном, создатель «классической физики». Открыл закон всемирного тяготения, разработал (наряду с Г. Лейбницем) дифференциальное и интегральное исчисления, изобрел зеркальный телескоп.

УЗНАЙМАТЕМАТИКУ.РФ

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),} \qquad (9.17)$$

то есть определенный интеграл от непрерывной функции равен разности значений первообразной от верхнего и нижнего пределов интегрирования.

Данное равенство называют **формулой Ньютона – Лейбница**.



Почему формула Ньютона – Лейбница обозначена двумя именами?
- Интеграл – он как песня. Так вот, Ньютон написал к ней музыку, а Лейбниц – слова.

Итак, задача вычисления определенного интеграла сводится в первую очередь к задаче нахождения неопределенного интеграла, а следовательно, основана на использовании свойств, таблиц и методов, приведенных для неопределенного интеграла.

Пример 9.15.

а) $\int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 4 - \frac{1}{4} = 3\frac{3}{4};$

б) $\int_0^1 \left(5x^5 + 1\right)dx = (\frac{5x^6}{6} + x)\Big|_0^1 = \left(\frac{5\cdot 1^6}{6} + 1\right) - \left(\frac{5\cdot 0^6}{6} + 0\right) = 1\frac{5}{6};$

в) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = .arctgx\Big|_0^1 = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$

Тесная связь между определенным и неопределенным интегралом позволяет сделать вывод о том, что при вычислении определенного интеграла можно пользоваться теми же методами интегрирования. Однако существуют и особенности при использовании этих методов для определенных интегралов.

Метод интегрирования по частям в определенном интеграле

Формула интегрирования по частям в определенном интеграле:

$$\boxed{\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu.} \qquad (9.18)$$

Она применяется в тех же случаях, что и соответствующая формула для неопределенного интеграла.

Пример 9.16. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin\frac{x}{3}dx.$

$$\underline{\textit{Решение.}}\ \int_0^{\pi} x\sin\frac{x}{3}dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin\frac{x}{3}dx & v = -3\cos\frac{x}{3} \end{matrix} \right| = -3x\cos\frac{x}{3}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -3\cos\frac{x}{3}dx =$$

$$= \left(-3\pi\cos\frac{\pi}{3}\right) - \left(-3\cdot 0\cdot\cos\frac{0}{3}\right) + 9\sin\frac{x}{3}\Big|_0^{\pi} = -\frac{3\pi}{2} + 0 + \left(9\sin\frac{\pi}{3}\right) - \left(9\sin\frac{0}{3}\right) = -\frac{3\pi}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Метод замены переменной в определенном интеграле

Метод замены переменной в определенном интеграле основан на следующей теореме.

Теорема 9.6. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и пусть:

1) функция $x = \varphi(t)$ монотонна, непрерывна и имеет непрерывную производную, когда t меняется от α до β;

2) $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(x)$,

тогда справедлива формула

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.} \qquad (9.19)$$

Даная формула называется **формулой замены переменной в определенном интеграле.**

Замечание. Выполняя замену переменной в определенном интеграле, в отличие от случая неопределенного интеграла:

1) следует пересчитать пределы интегрирования;

2) не нужно возвращаться к старой переменной.

Пример 9.17. Вычислить интеграл $\int_1^{10}\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx.$

Решение.

$$\int_1^{10}\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx = \left| \begin{matrix} \sqrt{x-1} = t \Rightarrow x-1 = t^2 \quad \Rightarrow x = t^2+1 \quad \Rightarrow dx = 2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 1 & 10 \\ \hline t & 0 & 3 \end{array} \end{matrix} \right| = \int_0^3 \frac{t}{t^2+1}2tdt = 2\int_0^3\frac{t^2}{t^2+1}dt =$$

$$= 2\int_0^3\frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}dt = 2\left(\int_0^3 dt - \int_0^3\frac{1}{t^2+1}dt\right) = 2\left(t\Big|_0^3 - arctgt\Big|_0^3\right) = 2(3 - arctg3).$$

Лекция 9.4. Приложения определенного интеграла

П л а н

1. Понятие несобственного интеграла первого рода и его вычисление.

2. Понятие несобственного интеграла второго рода.

3. Приложения определенного интеграла.

УЗНАЙМАТЕМАТИКУ.РФ

Определяя понятие определенного интеграла как предела интегральных сумм, предполагалось, что: 1) отрезок интегрирования конечный; 2) подынтегральная функция непрерывна на этом отрезке. Если хотя бы одно из условий не выполнено, то данное определение теряет смысл. Так, в случае бесконечного отрезка интегрирования нельзя разбить отрезок на n частей конечной длины, а в случае разрывной функции интегральная сумма не имеет конечного предела. Тогда и появляются понятия несобственного интеграла первого рода и несобственного интеграла второго рода.

1. *Понятие несобственного интеграла первого рода и его вычисление*

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$.

Несобственный интеграл первого рода от функции $f(x)$ определяется как предел обычного определенного интеграла:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.} \qquad (9.20)$$

Если предел в правой части существует и конечен, то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется **сходящимся,** а функция $f(x)$ – **интегрируемой на бесконечном промежутке** $[a;+\infty)$; если же предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **расходится.**

Собственные – интегралы, которые сам взял, и несобственные, которые списал. Сходящиеся – интегралы, которые сходятся с ответом и расходящиеся – которые не

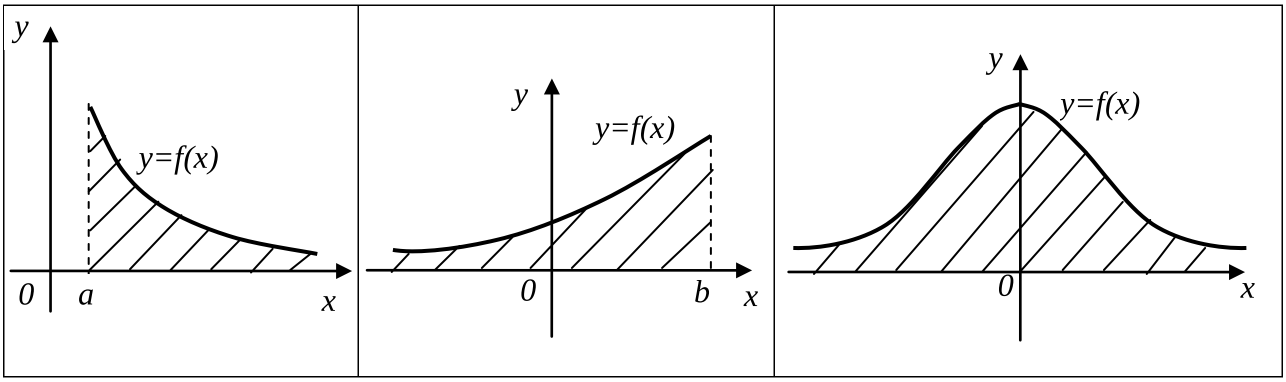
Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке $(-\infty;b]$: $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами определяется формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

где c – число.

Геометрическим смыслом сходящегося несобственного интеграла первого рода является **площадь криволинейной трапеции с бесконечно длинным основанием** (рис. 9.3).



а б в

Рис. 9.3

<u>*Пример 9.18*</u>. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$

<u>*Решение*</u>. Подынтегральная функция $\frac{1}{1+x^2}$ всюду непрерывна и, следовательно, интегрируема в любом конечном промежутке. Имеем

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{1}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} arctgx\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(arctgb - arctg1\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Значит, несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ сходится.

2. Понятие несобственного интеграла второго рода

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b)$, но имеет бесконечный разрыв в точке b.

Несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$ на промежутке $[a;b)$ называется интеграл

$$\boxed{\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx.} \qquad (9.21)$$

Если предел в правой части существует и конечен, то несобственный интеграл называется **сходящимся**; в противном случае – **расходящимся**.

Аналогично определяется **несобственный интеграл на промежутке** $(a;b]$ функции $f(x)$, терпящей бесконечный разрыв в точке a:

$$\boxed{\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.} \qquad (9.22)$$

Если функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв во внутренней точке c отрезка $[a;b]$, то **несобственный интеграл второго рода** от функции $f(x)$,

УЗНАЙМАТЕМАТИКУ.РФ

которая имеет бесконечный разрыв во внутренней точке $c \in [a;b]$, определяется как сумма несобственных интегралов второго рода по его частям $[a;c)$ и $(c;b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \ . \qquad (9.23)$$

Данный интеграл будет сходящимся только в том случае, если оба интеграла в правой части сходятся.

Геометрическим смыслом сходящегося несобственного интеграла второго рода является **площадь бесконечно высокой криволинейной трапеции** (рис. 9.4).

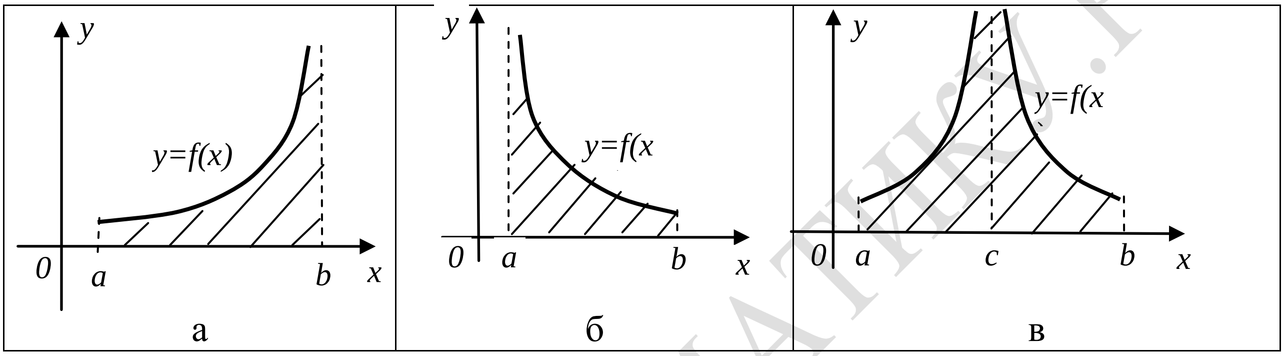


Рис. 9.4

<u>*Пример 9.20*</u>. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

<u>*Решение*</u>. При $x=1$ функция $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ терпит бесконечный разрыв.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} (\arcsin x)\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Поскольку оказалось, что предел существует, то несобственный интеграл сходится, а площадь S фигуры, расположенной под графиком функции $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ над промежутком $[0;1)$, равна $\frac{\pi}{2}$.

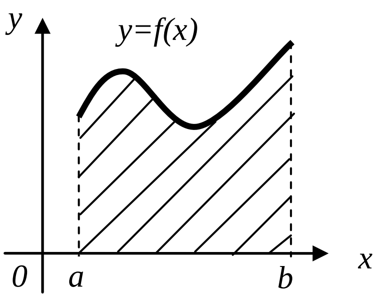
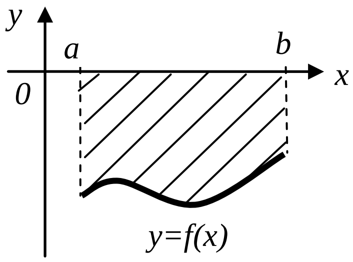
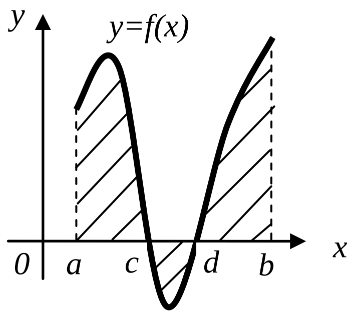
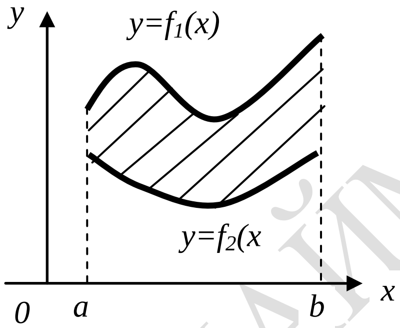
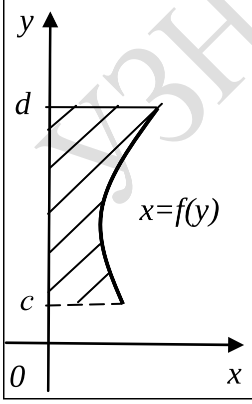
3. Приложения определенного интеграла

Вычисление площади S плоской фигуры в декартовой системе координат

Таблица 9.3

Рисунок	Формула

УЗНАЙМАТЕМАТИКУ.РФ

	Криволинейная трапеция ограничена сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу осью Ox, слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$	$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx,}$$ *если* $f(x) \geq 0$ (9.24)
	Криволинейная трапеция ограничена снизу графиком функции $y = f(x)$, сверху осью Ox, слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$	$$\boxed{S = -\int_a^b f(x)dx,}$$ *если* $f(x) \leq 0$ (9.25)
	Криволинейная трапеция ограничена кривой $y = f(x)$, которая конечное число раз меняет знак на $[a;b]$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$	$$\boxed{S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx}$$ (9.26)
	Криволинейная трапеция ограничена сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу графиком функции $y = g(x)$, слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$	$$\boxed{S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx,}$$ (9.27) *если* $f_1(x) \geq f_2(x)$
	Криволинейная трапеция ограничена графиком функции $x = f(y)$, осью Oy, прямыми $y = c$ и $y = d$	$$\boxed{S = \int_c^d f(y)dy,}$$ (9.28) *если* $f(y) \geq 0$

УЗНАЙМАТЕМАТИКУ.РФ

Пример 9.21. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $y = 2x - x^2, \quad x = 3, \quad y = 0$; б) $y = x^2 + 4x, \quad y = x + 4$.

Решение.

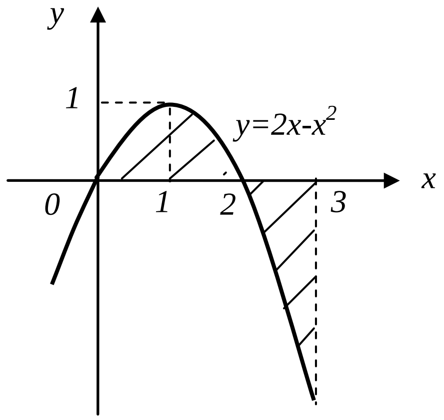


Рис. 9.5

а) Построим фигуру, площадь которой требуется найти (рис. 9.5).

Кривая $y = 2x - x^2$ является параболой с вершиной в точке $(1;1)$. Парабола пересекает ось Ox в точках $x = 0$ и $x = 2$. Фигура состоит из двух частей, следовательно, по формуле (9.26):

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^2 \left(2x - x^2\right)dx + (-\int_2^3 \left(2x - x^2\right)dx) =$$

$$= \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 - \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^3 = \frac{8}{3}.$$

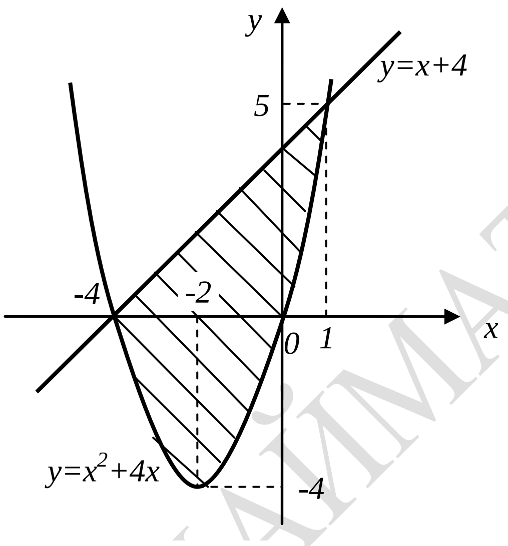


Рис. 9.6

б) Построим фигуру, площадь которой требуется вычислить: прямую $y = x + 4$ и параболу $y = x^2 + 4x$ с вершиной $(-2; -4)$ и точками пересечения оси Ox в $x = 0$ и $x = -4$ (рис. 9.6). Найдем точки пересечения параболы $y = x^2 + 4x$ и прямой $y = x + 4$, решив систему:

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x, \\ y = x + 4. \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4x = x + 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -4, \\ x_2 = 1. \end{array}\right.$$

По формуле (9.27) имеем:

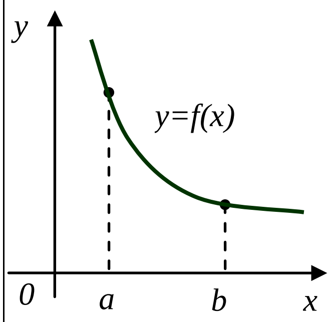
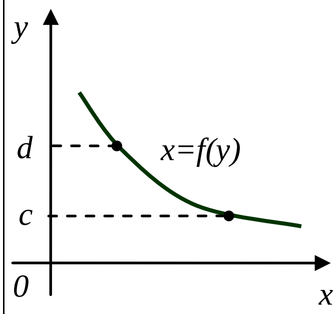
$$S = \int_{-4}^{1} \left[(x + 4) - \left(x^2 + 4x\right)\right]dx =$$

$$= \int_{-4}^{1} \left(-x^2 - 3x + 4\right)dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_{-4}^{1} = 20\frac{5}{6}.$$

УЗНАЙМАТИКУ.РФ

Вычисление длины l дуги кривой

Таблица 9.4

Рисунок	Формула
 Кривая AB задается функцией $y = f(x)$, дифференцируемой на отрезке $[a, b]$	$\boxed{l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.}$ (9.29) $A(a,\ f(a))\ \ B(b,\ f(b))$
 Кривая AB задается функцией $x = f(y)$, дифференцируемой на отрезке $[c, d]$	$\boxed{l = \int\limits_c^d \sqrt{1 + (x'(y))^2}\,dy.}$ (9.30)
Кривая задана в параметрической форме $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ причем для дуги AB: $\alpha \le t \le \beta$, а $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – дифференцируемые функции на $[\alpha; \beta]$	$\boxed{l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt.}$ (9.31)

<u>*Пример 9.22*</u>. Найти длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$ от точки $(0; 0)$ до точки $(4; 8)$.

<u>*Решение*</u>. Полукубическая парабола $y^2 = x^3$ симметрична относительно оси *Ox*. Точки $(0; 0)$ и $(4; 8)$ лежат на верхней ветви параболы, которая описывается уравнением $y = x^{\frac{3}{2}}$. Тогда $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ и по формуле имеем:

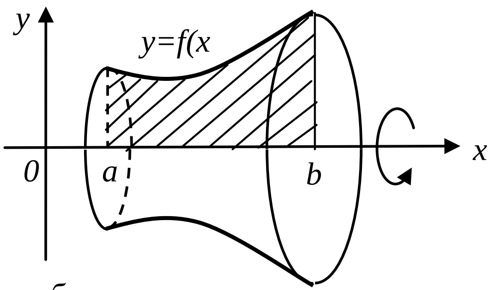
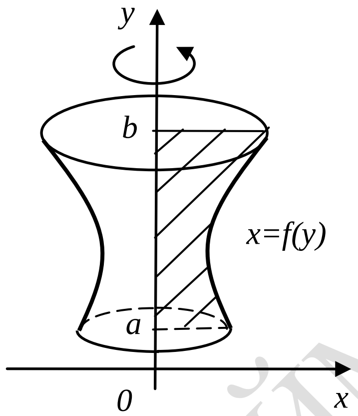
$$l = \int\limits_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \left| \begin{array}{c} 1 + \frac{9}{4}x = t^2 \Rightarrow x = \frac{4}{9}(t^2 - 1) \Rightarrow dx = \frac{4}{9}2tdt = \frac{8}{9}tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline t & 1 & \sqrt{10} \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_1^{\sqrt{10}} t\frac{8}{9}tdt = \frac{8}{9}\frac{t^3}{3}\Bigg|_1^{\sqrt{10}} = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right).$$

УЗНАЙМАТЕМАТИКУ.РФ

Вычисление объема V тела вращения

Таблица 9.5

Рисунок	Формула
 Тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу осью Ox, слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$	$\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(x)dx,}$ (9.31) *если* $f(x) \geq 0$
Тело образовано вращением вокруг оси Ox фигурой, ограниченной сверху графиком функции $y = f_1(x)$, снизу графиком функции $y = f_2(x)$, слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$	$\boxed{V = \pi\int_a^b (f_1^2(x) - f_2^2(x))dx,}$ (9.32) *если* $f_1(x) \geq f_2(x)$
 Тело образовано вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $x = f(y)$, осью Oy, прямыми $y = a$ и $x = b$	$\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(y)dy,}$ (9.33) *если* $f(y) \geq 0$

Пример 9.23. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Решение. $V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x)dx = \frac{\pi}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}.$

УЗНАЙМАТЕМАТИКУ.РФ